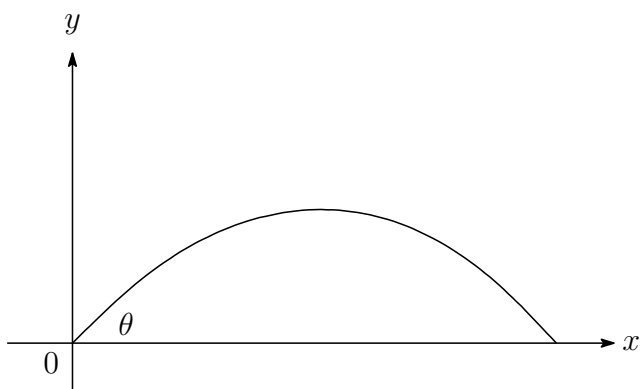


空気抵抗を加味した放物運動 (テイラー級数展開の応用)

角度 θ で投射されたボールの運動を空気抵抗を加味して考える .



ボールの質量 m , 重力加速度 g , 抵抗係数 $\gamma > 0$, 初速度 v_0 , 投射角度 θ として, 位置 $(x(t), y(t))$ について

$$\begin{aligned} mx''(t) &= -\gamma x'(t) \\ my''(t) &= -mg - \gamma y'(t), \end{aligned}$$

初期条件

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0, \\ x'(0) &= v_0 \cos \theta, \quad y'(0) = v_0 \sin \theta \end{aligned}$$

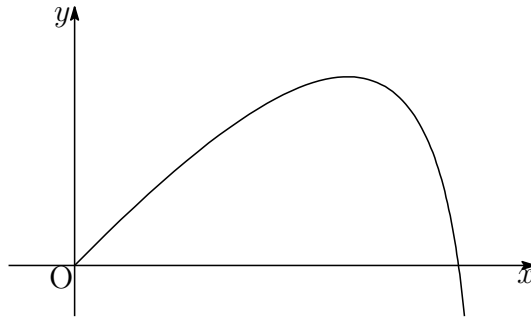
をみだす運動を考える . ただし, ボールの空気抵抗は運動の向きの逆向きで速度の大きさに比例することを仮定する . 変数分離形に対する解法によって, 解 $x(t), y(t)$ は厳密に次のように求まる .

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mv_0 \cos \theta}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) \\ y(t) &= -\frac{mg}{\gamma}t + \left(\frac{m}{\gamma}\right)^2 \left(g + \frac{\gamma}{m}v_0 \sin \theta\right) (1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}) \end{aligned}$$

ここで, 簡単のため, $m = 1, \gamma = 1$ として解を表示すると,

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos \theta)(1 - e^{-t}) \\ y(t) &= -gt + (g + v_0 \sin \theta)(1 - e^{-t}) \end{aligned}$$

を得る .



問題 1 水平方向の最大到達点を求めよ．到達点とは $y(t_1) = 0$ をみたす $t_1 > 0$ に対して $x(t_1)$ の値のことをいう．そして θ の変化により $x(t_1)$ の最大値を最大到達点と呼ぶ．最大到達点を与える θ^* を求めよ．

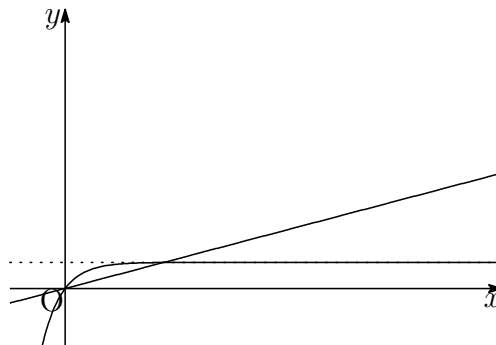
この問題を解くには $y(t) = 0$:

$$gt = (g + v_0 \sin \theta)(1 - e^{-t}) \tag{1}$$

をみたす正の解 t_1 を求めて， $x(t_1)$ の値を求めればよい．そして， $x(t_1)$ の θ による依存性を調べればよい．しかし，実際に (1) の厳密解を求めることは難しい．ただし，正の解をただ一つ持つことは容易にわかる．実際， $v_0 > 0$ ， $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対して， $0 < \frac{g}{g+v_0 \sin \theta} < 1$ なので，

$$\frac{g}{g + v_0 \sin \theta} t = 1 - e^{-t} \tag{2}$$

はただ一つの正の解をもつ．



厳密に解くことを回避して，近似的に最大到達点を達成する θ^* の値を求めたい．そのためにテイラー級数展開を援用する．

空気抵抗を無視 ($\gamma = 0$) したときは v_0 に無関係に $\theta^* = \frac{\pi}{4}$ (45度) である． $\theta = \frac{\pi}{4}$ の近傍で最大到達点の様子を近似的に導く：

定理 2 v_0 が十分に小さいとき，または v_0 が十分に大きいとき，最大到達点を達成する θ^* の値は $\frac{\pi}{4}$ ではない．詳しくは $\exists \theta_0 < \frac{\pi}{4}$ s.t. θ_0 における到達点は $\theta = \frac{\pi}{4}$ におけるそれより遠い．つまり，投射角度が 45 度より小さい方が遠くへ到達する．

証明 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. v_0 が十分に小さいとき (2) の正の解 t_1 は十分に 0 に近い. そこで $1 - e^{-t}$ を $t = 0$ でマクローリン展開すると,

$$1 - e^{-t} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - \dots \quad (3)$$

2次で切って, $t \simeq 0$ のとき,

$$1 - e^{-t} \simeq t - \frac{t^2}{2}$$

である. そして (2) の近似解として次の方程式の正の解を考える:

$$\frac{g}{g + v_0 \sin \theta} t = t - \frac{t^2}{2}$$

解は

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g + v_0 \sin \theta}$$

であり, これを (3) の 1次で切ったことによる近似 $x(t) \simeq v_0(\cos \theta)t$ に代入して到達点を得る.

$$x(t_1) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g + v_0 \sin \theta} \quad (= \phi(\theta))$$

θ で微分すると

$$\phi'(\theta) = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta(g + v_0 \sin \theta) - v_0^2(\sin 2\theta)v_0 \cos \theta}{(g + v_0 \sin \theta)^2}$$

$$\therefore \phi'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

ϕ は $\theta = \frac{\pi}{4}$ で単調減少であり, θ^* は $\frac{\pi}{4}$ より小さいことが示唆される.

次に v_0 が十分に大きいときを考える. θ は $\frac{\pi}{4}$ の近傍を取ると仮定する. (2) の正の解 t_1 は十分に大きく, 近似的に

$$x(t_1) \simeq v_0 \cos \theta \quad (= \phi(\theta))$$

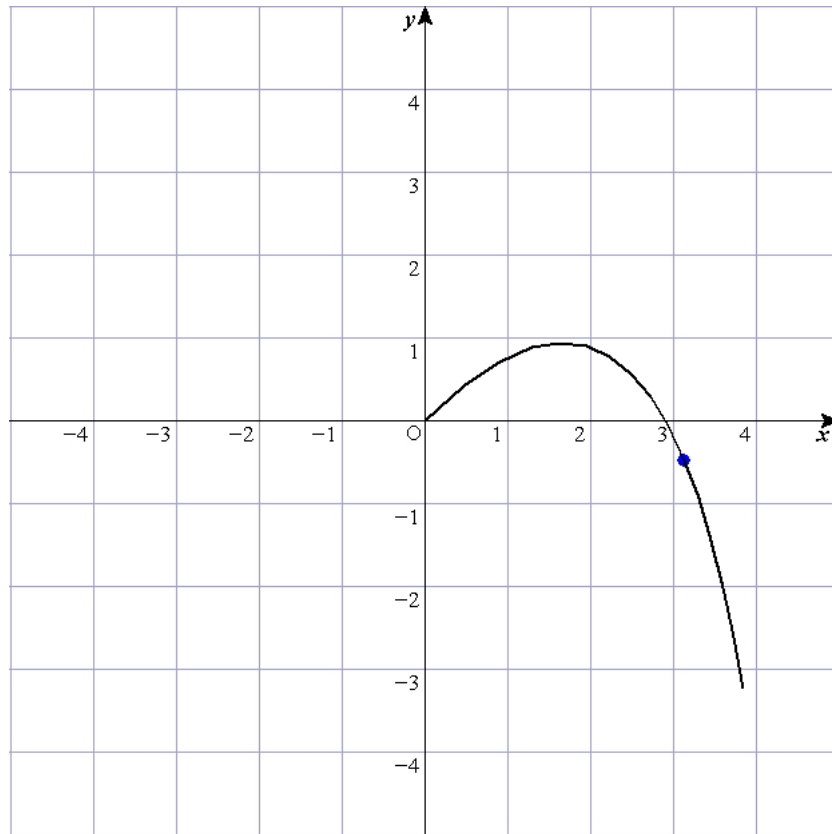
で与えられる. θ で微分すると

$$\phi'(\theta) = -v_0 \sin \theta$$

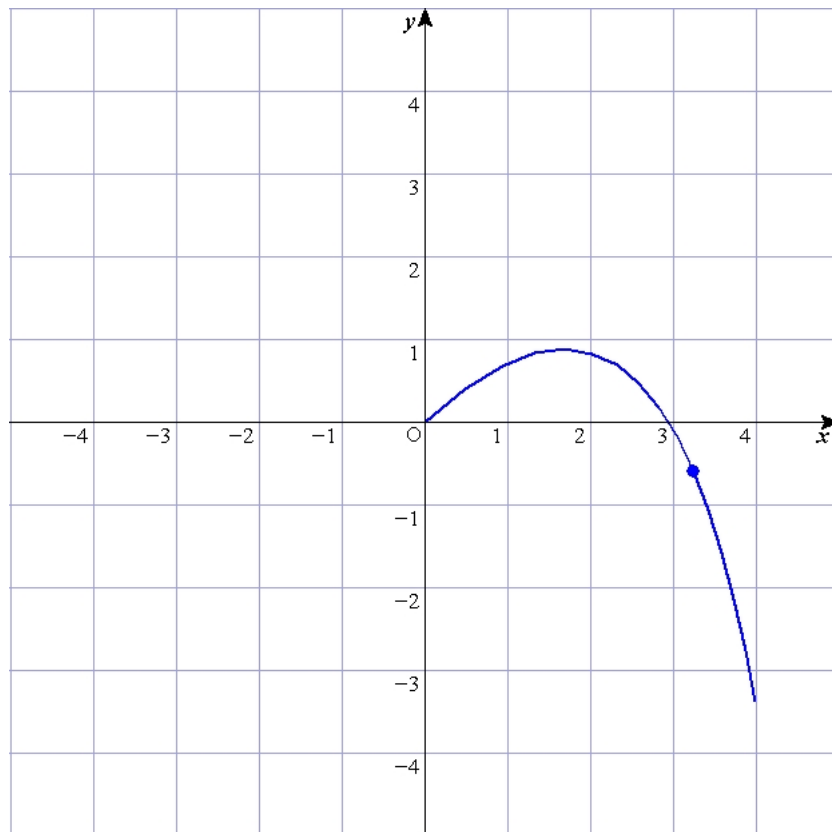
であり, $\phi'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. である. よって θ^* は $\frac{\pi}{4}$ より小さいことが示唆される. ■

最後に数式ソフトによる計算例を示す.

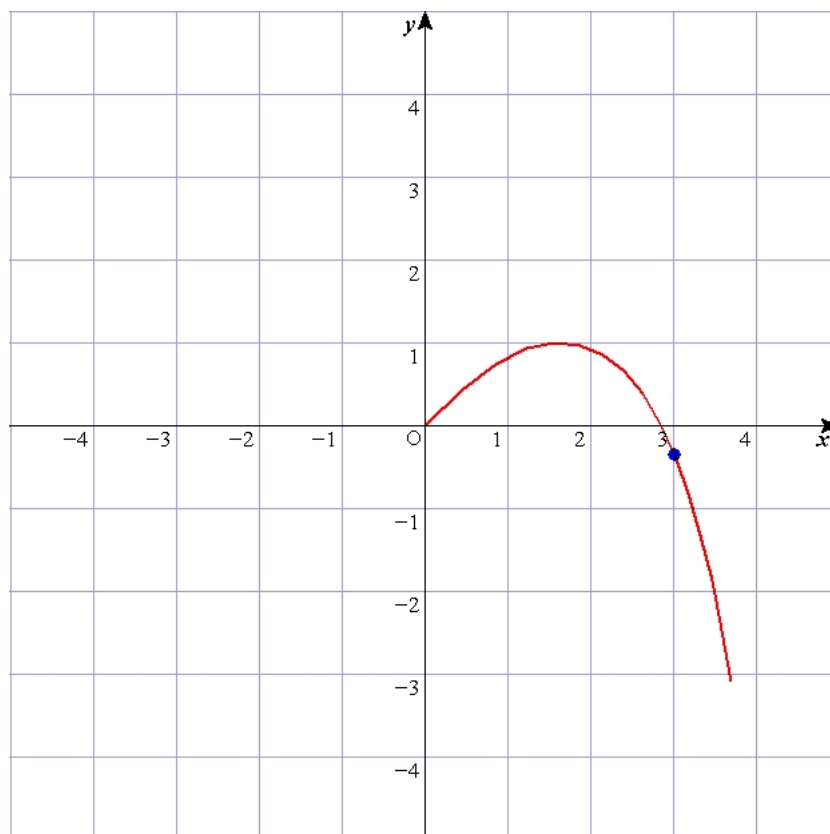
(1) $g = 9.8, v_0 = 7, \theta = 45$ 度の場合,



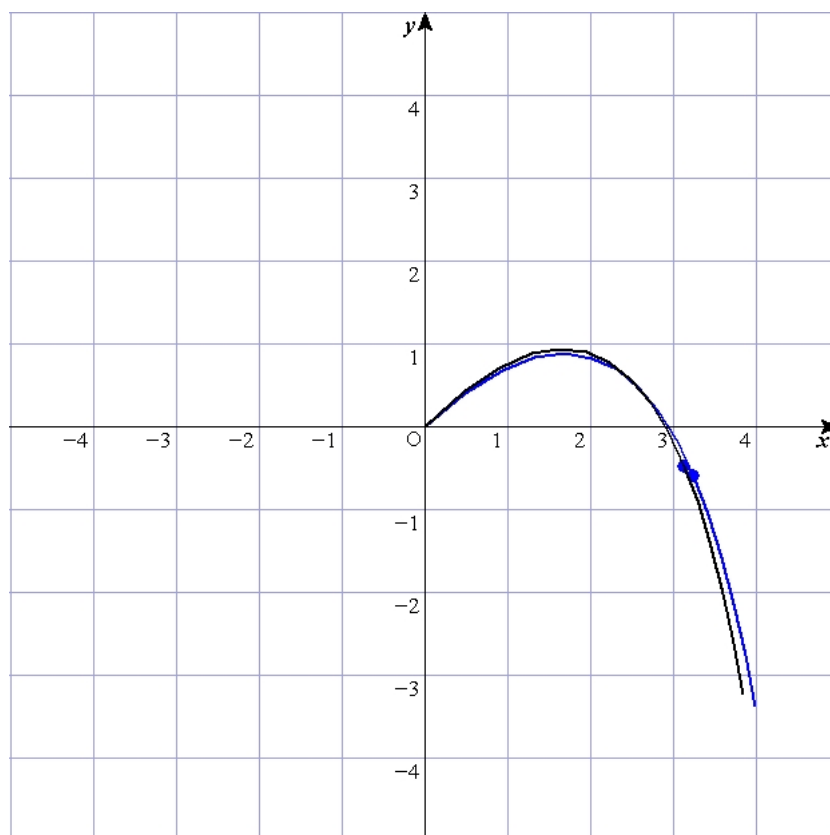
(2) $g = 9.8$, $v_0 = 7$, $\theta = 43$ 度の場合 ,



(3) $g = 9.8, v_0 = 7, \theta = 47$ 度の場合 ,



$\theta = 43, 45$ 度の場合を重ねると ,



わずかであるが, $\theta = 43^\circ$ の場合の方が遠くへ到達している. $\theta = 47^\circ$ の場合は明らかに手前である.

梅津健一郎・茨城大学教育学部数学教育教室