有理関数の不定積分[1]

$f(x), g(x)$ が多項式のとき $f(x)/g(x)$ を**有理関数**という．有理関数の例として $\frac{1}{x+1}$，x^2+x+1，$\frac{x}{x^2+2x+3}$，$\frac{x^3+1}{x+3}$．
有理関数の不定積分を求めるには次の 3 つの公式が基本を成す．

(1) $\int \frac{1}{x+a}dx = \log|x+a| + C$

(2) $a > 0$ に対して，$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(3) $a > 0$ に対して，$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(4) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

(1) は $x+a=t$ とおく置換積分で $\int \frac{1}{t}dt = \log|t| + C$ を用いる．(2) では $\frac{x}{a} = t$ とおく置換積分で $\int \frac{1}{1+t^2}dt = \tan^{-1} t + C$ を用いる．(3) は部分分数分解 $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1/2a}{x-a} - \frac{1/2a}{x+a}$ と (1) を用いる．(4) は合成関数の微分 $(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ から従う．

例 (a) $\int \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\log|x-\frac{1}{2}| + C.$

(b) $\int \frac{1}{2x^2+4x+10}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+2^2}\cdot 1\,dt$ ($x+1=t$ で置換)．公式 (2) を用いる．

(c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2-4}dx = \int \frac{1}{t^2-2^2}\cdot 1\,dt$ ($x-1=t$ で置換)．公式 (3) を用いる．**分母が２次，分子が定数のときは平方完成の符号により公式 (2), (3) を使い分ける**．

(d) $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \int \left\{\frac{1}{2}\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\right\}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx.$ **分母が２次，分子が１次の場合は，公式 (4) を使って (b) または (c) のタイプを導く**．

(e) $\int \frac{2x^4}{x^2+2x-1}dx = \int(2x^2-4x+8)dx + \int \frac{-16x+8}{x^2+2x-1}dx.$ **分母が２次，分子が２次以上の場合は，割り算により (b) のタイプを導く**．

分母が 2 次の有理関数の不定積分は以上の方法で**すべて**求めることができる．**分母が３次以上**，または**分母が因数分解された形**の場合には，部分分数分解により分母が 2 次以下の有理関数の和に直して上記の方法で計算する[2]．部分分数分解の方法について各々のタイプ別に述べる[3]．$A, B, C, \ldots$ は定数とする．

例 (f) $\int \frac{1}{x^3+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = \int(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1})dx.$

(g) $\int \frac{x^4+1}{x^3-1}dx = \int(x + \frac{x+1}{x^3-1})dx = \int x dx + \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \int x dx + \int(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1})dx$

(h) $\int \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}dx = \int(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3})dx$

(i) $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = \int(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3})dx$

(j) $\int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int(\frac{A}{x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1})dx$

(k) $\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1})dx.$

(l) $\int \frac{1}{(x+1)^2(x-2)^3}dx = \int(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3})\,dx.$

特に**重根をもつ**因数の場合，$(x+1)^2, (x-2)^3, \ldots$ このような形に分解できることに注意せよ．

[1] 2002 年 12 月 26 日の補講資料
[2] 部分分数分解については解析入門で既習済みであるのでそちらも参照せよ．
[3] どの場合でも割り算により分子の次数を分母の次数より**小さくしておく**ことに注意せよ．