4/27　　解析入門.

1. 次の関数のグラフの概形をかけ

(1) $y = 3x^2 - 9x + 1$

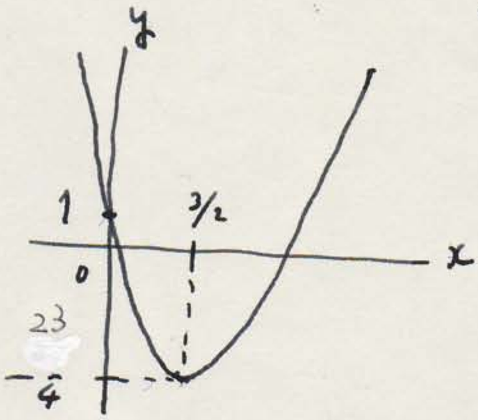
(2) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0.$

2. $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフを原点に関して対称に写した関数を求め、のグラフをかけ

4/27　　解答　　解析入門

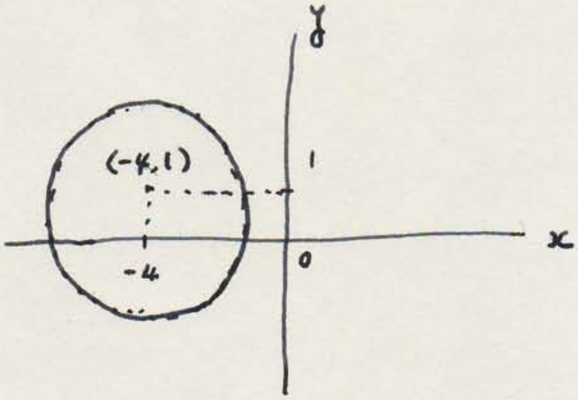
1. (1) $y = 3x^2 - 9x + 1 = 3(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) - \frac{27}{4} + 1$

$= 3(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{23}{4}$



(2) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0$

$(x+4)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 13 = 0 \quad \therefore (x+4)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

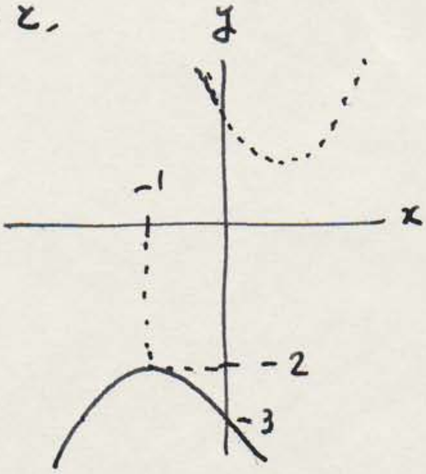


2. $y \to \frac{y}{-1}$, $x \to \frac{x}{-1}$ でおきかえると、

$\frac{y}{-1} = (\frac{x}{-1})^2 - 2(\frac{x}{-1}) + 3$

$\therefore y = -x^2 - 2x - 3.$

$= -(x+1)^2 - 2$



5/11 えんしゅう.

1. $$y = \frac{4x+1}{x-3}$$

のグラフをかけ、さらに値域を求めよ.

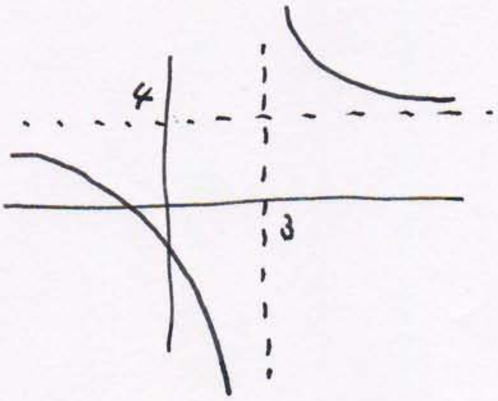
2. 部分分数に分解せよ.

(1) $$\frac{1}{6x^2+x-2}$$

(2) $$\frac{x^3}{x^2-4x+3}$$

5/11 解答

1. $$y = \frac{4x+1}{x-3} = 4 + \frac{13}{x-3}$$



値域 $y \neq 4$.

2. (1) $$\frac{1}{6x^2+x-2} = \frac{-\frac{3}{7}}{3x+2} + \frac{\frac{2}{7}}{2x-1}$$

(2) $$\frac{x^3}{x^2-4x+3} = x+4 + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{27}{2}}{x-3}$$

5/18　　入門

1. 部分分数に分解せよ.

$$\frac{-2x^2+2x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

2. 次の関数のグラフをかき,

定義域, 値域を求めよ.

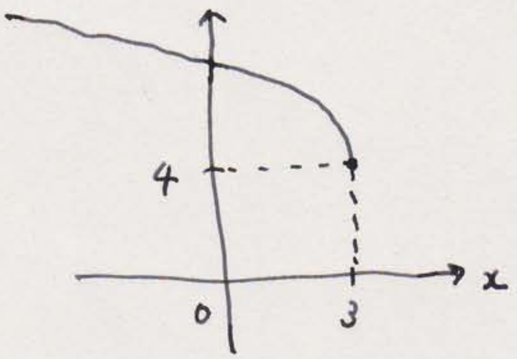
$$y = 4 + \sqrt{-2x+6}$$

5/18 解答.

1. $$\frac{-2x^2+2x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

$\Rightarrow A = 2,\ B = -1,\ C = -2,\ D = 1$

2. $y = 4 + \sqrt{-2x+6} \Rightarrow y-4 = \sqrt{-2(x-3)}$



定義域 $x \leqq 3$

値域 $y \geqq 4$.

5/25 入門

1. $\left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ を求めよ.

2. 方程式

$$2^x = \frac{1}{\sqrt[3]{64}}$$

を解け.

3. $0 < a < 1$ のとき,

$$p < q \Rightarrow a^p > a^q$$

を示せ. p, q は有理数とする.

5/25　解答.

1. $\frac{9}{25}$　　2. $x = -2$

3. $a^q = a^{q-p} \cdot a^p$　(指数法則)

$a = \frac{1}{b}$ とおくと $b > 1$.

$a^{q-p} = \frac{1}{b^{q-p}}$.

$b^{q-p} > 1$ より $0 < a^{q-p} < 1$.

以上から
$a^q = a^{q-p} \cdot a^p < 1 \cdot a^p = a^p$ //

6/8 入門

1. 逆関数を求め，グラフにせよ．

$$y = 2 + \frac{4}{1-3x} \quad \left(x > \frac{1}{3} \right)$$

2. 次の関数の定義域を制限して，その逆関数をグラフにせよ．

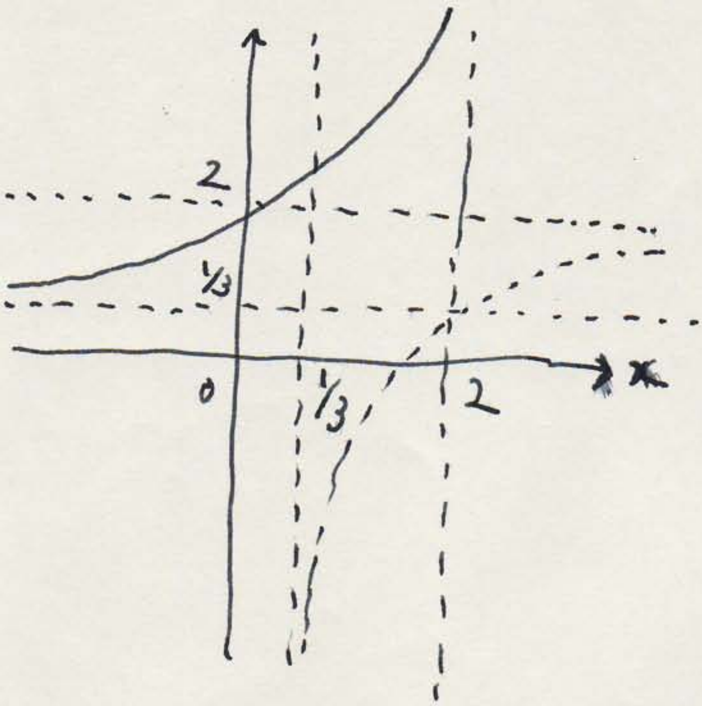
$$y = x^2 - 2x + 3$$

3. 計算せよ．

(1) $\log_{81} 3$ (2) $\log_{\frac{1}{4}} 16$ ．

6/8 解答

1. $y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3x-6}$

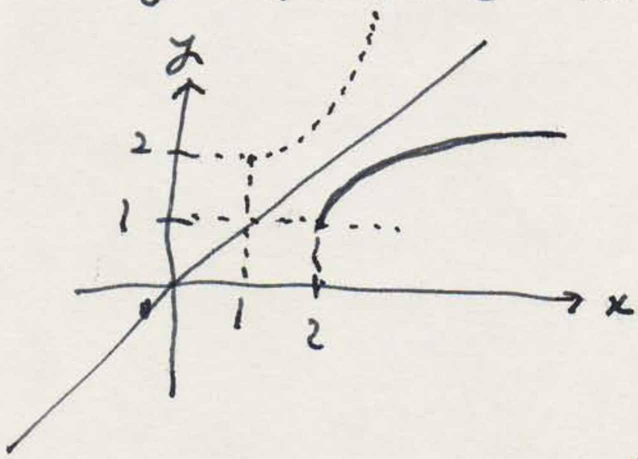


2. $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

$y - 2 = (x-1)^2 \quad \therefore \quad x - 1 = \sqrt{y-2} \quad (x \geqq 1).$

$\therefore$ $y = x^2 - 2x + 3 \ (x \geqq 1)$ の逆関数は

$y = 1 + \sqrt{x-2} \quad (x \geqq 2)$



3. (1) $1/4$ (2) -2.

6/15　入門

1.　6^{19} と 8^{17} はどちらが大きいか.

2.　弧度法で表示せよ.

15°, 75°, 140°

3.　$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$ (底の変換)

を示せ.

(ヒント:　$x = \log_a M$,　$y = \log_b a$ とおけ)

6/15 解答

1. 6^{19} と 8^{17} はどちらが大きいか?

$(\log_{10} 2 = 0.3 \quad , \log_{10} 3 = 0.48)$

$6^{19} \Rightarrow \log_{10} 6^{19} = 19 \log_{10} 6$

$= 19 \log_{10}(2 \times 3)$

$= 19 (\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$

$= 19 (0.3 + 0.48)$

$= 19 \times 0.78$

$= 14.82$

$14 \leqq 14.82 < 15$

15ケタ

$8^{17} \Rightarrow \log_{10} 8^{17} = 17 \log_{10} 8$

$= 17 \log_{10} 2^3$

$= 51 \log_{10} 2$

$= 51 \times 0.3$

$= 15.3$

$15 \leqq 15.3 < 16$

16ケタ

よって、$8^{17} > 6^{19}$

$\begin{array}{r} 51 \\ \times 0.3 \\ \hline 15.3 \end{array}$

---

2. 弧度法で表せ

$15^\circ \rightarrow \frac{15}{180}\pi = \frac{\pi}{12}$

$75^\circ \rightarrow \frac{75}{180}\pi = \frac{5}{12}\pi$

$140^\circ \rightarrow \frac{140}{180}\pi = \frac{7}{9}\pi$

---

3. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$ (底の変換) を導け。[ヒント: $x = \log_a M$, $y = \log_b a$ とおけ]

$\underline{x = \log_a M}$, $\underline{y = \log_b a}$ とおく

$a^x = M \cdots ①$ $\quad b^y = a \cdots ②$

①に②を代入

$(b^y)^x = M$

$b^{xy} = M \Longrightarrow xy = \log_b M$

$(\log_a M) \times (\log_b a) = \log_b M$ となる

6/22 入門

1. $f(\theta) = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかけ.

2. $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき,

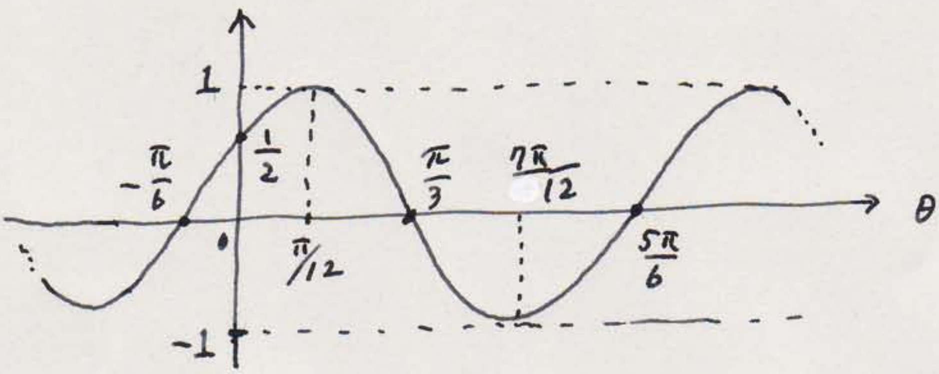
$$\cos\theta > -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

をみたす θ の範囲を求めよ.

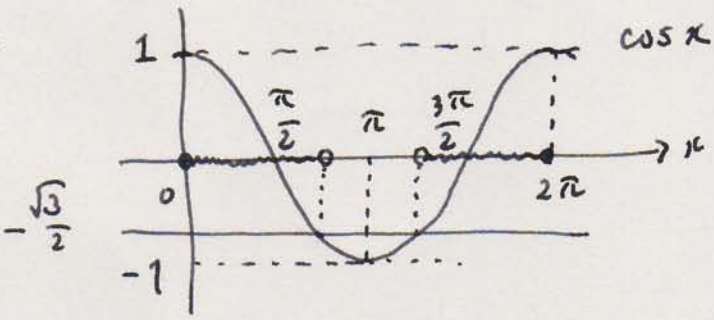
6/22　解答

1.　$f(\theta) = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ のグラフ.

書き方は
$$\sin\theta \longrightarrow \sin 2\theta \longrightarrow \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$
θ方向 $\frac{1}{2}$倍.　　θ方向に $-\frac{\pi}{6}$ 平行移動.



2.



$$\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff 0 \leqq x < \frac{5}{6}\pi,\quad \frac{7}{6}\pi < x \leqq 2\pi.$$

6/29 入門.

1. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$

を導け.

2. 3倍角の公式を導け.

$\sin 3\alpha = \cdots\cdot$

3. $\cos\dfrac{\pi}{16}$ を求めよ.

6/29　解答.

1. $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

両辺に $\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}$ をかけると

$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

2. $$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha$$

$$= \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \underbrace{\cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)}_{= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}$$

$$= \underline{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}.$$

3. $$\cos^2\frac{\pi}{16} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}.$$

$\cos\frac{\pi}{8} > 0$ より

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+1/\sqrt{2}}{2}}$$

$\cos\frac{\pi}{16} > 0$ より

$$\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+1/\sqrt{2}}{2}}}{2}}$$

7/6　入門

1. $y = \sin^{-1} x$ のグラフをかけ

2. 値を求めよ.

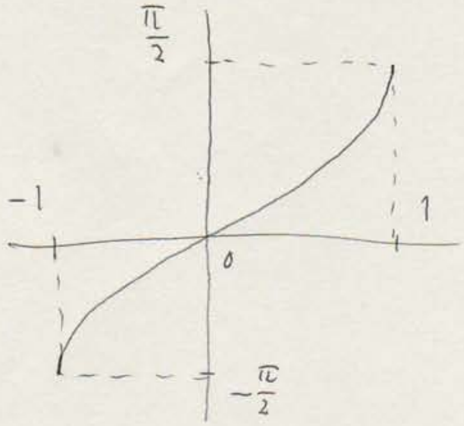
x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin^{-1} x$						
$\cos^{-1} x$						
$\tan^{-1} x$						

3. $\sin^{-1} x = \tan^{-1} 10$

をみたす x を求めよ.

7/6 解答

1.



2.

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos^{-1}x$	π	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	/	$\frac{\pi}{6}$
$\sin^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	/	$\frac{\pi}{3}$
$\tan^{-1}x$	$-\frac{\pi}{4}$	/	/	0	$\frac{\pi}{6}$	/

3. $\sin^{-1}x = \tan^{-1}10 = y$ とおく

$$\begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 10 = \tan y \ (>0) \\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$1+\tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1-\sin^2 y} \quad \Rightarrow \quad 101 = \frac{1}{1-x^2}$$

$\therefore\ x = \pm\frac{10}{\sqrt{101}}$ 　　$y>0$ より $x>0$ 　　$\therefore\ x = \frac{10}{\sqrt{101}}$.

7/13 〆切.

1. 恒等式 $\cos^{-1}x + \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ を導け.

2. 極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + (-1)^n\right)$

3. nについて $a_n \leqq b_n$ とする.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき,

$a \leqq b$ を示せ.

(ヒント: $a > b$ として矛盾を導け).

7/13 解答

1. 略

2. (1) 発散 (∞)

(2) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=0$ (収束)

$$\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore (-1)^n\frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

(3) 振動

3. $a>b$ とする.

$\varepsilon = \frac{a-b}{3} > 0$ とおく.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to\infty} b_n = b\end{array}\right\}$$ より十分大きな番号 n で

$$b_n < b+\varepsilon \text{ かつ } a-\varepsilon < a_n$$

をみたすものがある. ゆえにこの n について,

$$b_n < b+\varepsilon < a-\varepsilon < a_n$$

$\therefore\ b_n < a_n$ 矛盾

$\therefore\ a \leqq b$ である.

7/20 入.

1. 数学的帰納法により次を示せ.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

2. 上の等式を直接導け. すなわち,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

1. 等式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$ について

解答.

(1) 直接導け.

左辺 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} =$ 右辺 .

(2) 数学的帰納法を用いて示せ.

(i) $n=1$ のとき. 左辺 $= \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, 右辺 $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ より成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき. 等式が成り立つとすると.

$$\sum_{k=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

$n = k+1$ のとき.

$$\sum_{k=1}^{k+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$= \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$ より $n=k+1$ のときも成り立つので.

以上よりこの等式は成り立つ.