

- [1] 関数 $y = xe^{-2x}$ は微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

をみたすことを示せ.

- [2] 次の微分方程式の初期条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ のもとでの特殊解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos \frac{x}{2}$$

- [3] 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = x + 2xy$$

- [4] 次の微分方程式の $y(1) = 1$ のもとでの特殊解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{2x + y}$$

- [5] 空気抵抗を考慮に入れた物体の自由落下を考える. 質量 m の物体は落下の際に速度 v に比例した力 γv を上向きに受けるとする (γ は比例定数). 下向きを x の正軸として自由落下させる (すなわち, 時刻 $t = 0$ のとき $v = 0$). 次の問に答えよ.

- (1) 運動を局所的に見て, 速度 v に関する微分方程式を立てよ. ただし, 重力加速度は g を用いよ.
- (2) 時間が十分に経つと速度が一定になることを, 微分方程式の特殊解を求めることによって示せ.

[1]

$$y' = e^{-2x} - 2xe^{-2x}, \quad y'' = -4e^{-2x} + 4xe^{-2x}$$

より, それぞれ左辺の式に代入して 0 になることを確かめる.

[2] 右辺について不定積分を行うと

$$y' = 2 \sin \frac{x}{2} + C \quad (C \text{ は定数}).$$

さらに右辺について不定積分を行うと

$$y = -4 \cos \frac{x}{2} + Cx + D \quad (D \text{ は定数}).$$

$y'(0) = 1$ より $C = 1$. そして $y(0) = 0$ より $D = 4$. よって特殊解は

$$y = -4 \cos \frac{x}{2} + x + 4.$$

[3]

$$\frac{dy}{dx} = x + 2xy = x(1 + 2y)$$

であるので, 変数分離形である.

$$\int \frac{1}{1 + 2y} dy = \int x dx$$

から左辺は

$$\int \frac{1}{1 + 2y} dy = \frac{1}{2} \log |1 + 2y|,$$

右辺は

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad (C \text{ は定数}).$$

ゆえに

$$\frac{1}{2} \log |1 + 2y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

式変形により

$$1 + 2y = Ae^{x^2} \quad (A \text{ は定数}).$$

を経て, 一般解

$$y = \frac{Ae^{x^2} - 1}{2}.$$

を得る.

[4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{2x + y} = \frac{1 - 2(y/x)}{2 + (y/x)}$$

から $u = y/x$ とおくと, $y' = u + xu'$ を得るから与式は

$$u + xu' = \frac{1 - 2u}{2 + u}$$

を経て, 変数分離形

$$u' = \frac{1}{x} \frac{1 - 4u - u^2}{2 + u}$$

に帰着される .

$$\int \frac{2+u}{1-4u-u^2} du = \int \frac{1}{x} dx$$

から

$$-\frac{1}{2} \log |1-4u-u^2| = \log |x| + C \quad (C \text{ は定数}).$$

式変形により

$$x^2(1-4u-u^2) = C'.$$

u を y に戻すと

$$x^2 - 4xy - y^2 = C'.$$

$x = 1$ を代入すると $y(1) = 1$ より $C' = -4$ を得る . 特殊解は

$$x^2 - 4xy - y^2 = -4.$$

[5] (1)

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v.$$

(2) 変数分離形だから

$$\int \frac{1}{mg - \gamma v} dv = \int \frac{1}{m} dt$$

として

$$-\frac{1}{\gamma} \log |mg - \gamma v| = \frac{t}{m} + C$$

を得る . 式変形により

$$mg - \gamma v = Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$v(0) = 0$ であるから $A = mg$ を得る . したがって

$$v = \frac{mg}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right).$$

$t \rightarrow \infty$ のとき $v \rightarrow \frac{mg}{\gamma}$ だから速度が一定に向かうことが示された .

2001 微分方程式 夜 期末試験問題

実施日：2001 年 7 月 28 日 (土) 6 限

- [1] 次の一階線型非同次方程式を定数変化法に従って一般解を求めよ．

$$y' + 2y = e^{5x}$$

- [2] 次の二階線型非同次方程式を考える．

$$y'' + 4y = \sin 2x$$

(1) $Y = Ax \cos 2x$ (A は定数) の形の特殊解を求めよ．

(2) 一般解を求めよ．

- [3] 次のベルヌーイ型方程式の一般解を求めよ．

$$x^2 y' = xy + y^2$$

- [4] 速度に比例した抵抗を考慮に入れたバネによる振動の方程式を考える．

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = F(t)$$

ただし, $x(t)$ は運動する質点の時刻 t における変位を表し, γ は抵抗に関する比例定数を表し, ω はバネ定数に依存した比例定数を表し, $F(t)$ は外力を表す．ここでは $\gamma > 0, \omega > 0$ とする．次の二つの場合について, $t \rightarrow \infty$ における予想される運動の様子を述べよ．

(1) $F(t) = 1$ (定数)

(2) $\gamma = \omega, F(t) = e^{-t}$

2001 微分方程式 夜 期末試験問題・解答例

実施日：2001 年 7 月 28 日 (土) 6 限

- [1] 同次式 $y' + 2y = 0$ は変数分離形より, $y = Ce^{-2x}$. $y = C(x)e^{-2x}$ において, 定数変化法を用いる. $C'(x) = e^{7x}$ をみたすので, $C(x) = (1/7)e^{7x} + C$. 以上から一般解は

$$y = e^{-2x} \left(\frac{1}{7} e^{7x} + C \right).$$

- [2] (1) $Y'' = -4A \sin 2x - 4Ax \cos 2x$ より $Y = -(1/4)$.
 (2) 特性方程式 $t^2 + 4 = 0$ を解くと, $t = \pm 2i$. よって同次式の一般解は

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

したがって求める一般解は

$$y = -\frac{1}{4}x \cos 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

- [3] $u = y^{-1}$ で変換すると

$$u' + \frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

の一階線型を得る. これを解くと

$$u = \frac{-\log|x| + C}{x}.$$

よって求める一般解は

$$y = \frac{x}{C - \log|x|}.$$

- [4] 与式

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = F(t)$$

の一般解は $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$, ただし, $x_c(t)$ は $F(t) = 0$ としたときの一般解, $x_p(t)$ はある特殊解である. $\gamma > 0$ のとき, すべての場合について $x_c(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ であるので, $x_p(t)$ の挙動のみ考察すればよい.

(1) については $x_p(t) = A$, A は定数, とおくと, $x'_p = x''_p = 0$ だから, これが特殊解になるためには $A = 1/\omega^2$ であればよい. すなわち, $t \rightarrow \infty$ のとき, 運動はバネの自然長から $1/\omega^2$ 伸びたところで止まる.

(2) については $x_p(t) = Ae^{-t}$ とおくと, これが特殊解になるには $A = 1/(1 - \omega + \omega^2)$ であればよい. したがって, $t \rightarrow \infty$ のとき $e^{-t} \rightarrow 0$ であるので, 運動は自然長の位置に落ち着く.

- [1] 次の1階微分方程式の一般解を求めよ。ただし、(4)については一般解の公式に直接代入して求めた解答は零点とする。

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = y^2 \sin 2x$$

$$(2) \quad y' = x(y + y^2)$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + 2y}$$

$$(4) \quad y' - 2y = xe^x$$

- [2] 密閉された空間内の温度の変化を微分方程式を通して考察する。時刻 t における室温を $x(t)$ とするとき、次の1階線形非同次微分方程式を考える。

$$x'(t) = -ax(t) + b, \quad t > 0$$

ここで、 a, b は正の数で定数である。温度変化率 $x'(t)$ について、 $x'(t) > 0$ のときは温度が上昇の状態にあり、逆に $x'(t) < 0$ のときは下降の状態にある。この方程式は $x'(t) > 0$ のファクターとして熱源 $b > 0$ があり、空間の内から外に逃げる熱の様子を記述するファクターとして $-ax(t) < 0$ がある。したがって、 a は温度 $x(t)$ に対する冷却率を表す。

- 問題 $x(0) = 0$ (初期条件)のもとで特殊解を計算し、 $t \rightarrow \infty$ のときの(時間が十分に経ったときの)定常温度を求めよ。

[1] (1) $\int y^{-2} dy = \int \sin 2x dx$. $-y^{-1} = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$. よって

$$y = \frac{1}{\frac{\cos 2x}{2} - C}.$$

(2) $\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int x dx$. ここで

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log \left| \frac{y}{y+1} \right|.$$

ゆえに

$$\frac{y}{y+1} = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

y について解くと

$$y = \frac{Ce^{\frac{x^2}{2}}}{1 - Ce^{\frac{x^2}{2}}}.$$

(3) $u = y/x$ とおくと与式は $y' = \frac{1-u}{1+2u}$. $y' = u + xu'$ であるので,

$$xu' = \frac{1-2u-2u^2}{1+2u}.$$

$$\int \frac{1+2u}{1-2u-2u^2} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

$$-\frac{1}{2} \log |1-2u-2u^2| = \log |x| + C.$$

$\log |x^2(1-2u-2u^2)| = C$. ゆえに

$$x^2 - 2xy - 2y^2 = C.$$

(4) $y' - 2y = 0$ を解くと $y = Ce^{2x}$. C を $C(x)$ とおいて定数変化法を使う. $y' = C'e^{2x} + 2Ce^{2x}$. $y' - 2y = C'e^{2x} = xe^x$. $C' = xe^{-x}$. ゆえに $C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C$.

$$y = -(x+1)e^x + Ce^{2x}.$$

[2] 変数分離形であるから

$$\int \frac{dx}{b-ax} = \int dt = t + C.$$

$$-\frac{1}{a} \log |b-ax| = t + C.$$

$$\log |b-ax| = -a(t+C).$$

よって

$$b-ax = Ce^{-at}.$$

$$x = \frac{b}{a} - \frac{C}{a}e^{-at}.$$

$x(0) = 0$ から $C = b$ を得る. よって

$$x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at}).$$

これより $t \rightarrow \infty$ のとき $x(t) \rightarrow \frac{b}{a}$ であることがわかる. なお, 定数変化法を用いて特殊解を求めても同じ結果が得られる.

[1] 次の線形2階同次微分方程式を考える。

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

- (1) 特性方程式を考察することにより, この方程式の基本解 y_1, y_2 を求めよ。
(2) (1) で求めた基本解 y_1, y_2 のロンスキーヤン $W(y_1, y_2)$ が 零でない ことを確かめよ。

[2] 次の定数係数2階線形微分方程式の一般解を求めよ。

(1)
$$y'' + 9y = 4 \cos 3x$$

(2)
$$y'' - 7y' + 2y = \cos 4x$$

(3)
$$16y'' + 8y' + y = 3x$$

[1] (1) 特性方程式 $t^2 - 6t + 9 = 0$ より $t = 3$. よって 基本解は e^{3x}, xe^{3x} .

(2) ロンスキーヤン

$$W(e^{3x}, xe^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} \neq 0.$$

[2] (1)

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{2}{3}x \sin 3x$$

(2)

$$y = c_1 e^{\frac{7-\sqrt{41}}{2}x} + c_2 e^{\frac{7+\sqrt{41}}{2}x} - \frac{1}{70} \cos 4x - \frac{1}{35} \sin 4x$$

(3)

$$y = c_1 x e^{-\frac{1}{4}x} + c_2 e^{-\frac{1}{4}x} + 3x - 24$$

解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は零点とする。また、1階線形方程式の一般解の公式に直接代入して求めた解答は零点とする。

[1] 次の常微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x+y}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + 4xy^2 = y^2$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

[2] 次の常微分方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

(a) $y = \frac{1}{x}$ は解であることを示せ。

(b) 一般解を求めよ。

(c) $y(1) = 2$ の下での特殊解を求めよ。

[解答]

[1] (1) 同次形 ; $(1 + \sqrt{5}) \log \left| \frac{y}{x} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| - (1 - \sqrt{5}) \log \left| \frac{y}{x} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = -2\sqrt{5} \log |x| + C$

(2) 1 階線形 ; $y = \frac{-x \cos x + \sin x + C}{x}$

(3) 変数分離形 ; $y = \frac{1}{2x^2 - x + C}$

(4) ベルヌーイ型 ; $y^2 = \frac{2}{2x + 1 + Ce^{2x}}$

[2] (a) 直接代入することによって示す .

(b) リカッチ型方程式であるから , (a) より $z = y - \frac{1}{x}$ とおき , z の式に変換すると

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = z^2$$

のベルヌーイ型になる . さらに $w = z^{-1}$ とおき , w に式に変換すると

$$\frac{dw}{dx} + \frac{2}{x}w = -1$$

の 1 階線形になる . 定数変化法によりこの一般解は

$$w = -\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}$$

である . z の式に戻すと

$$z = \frac{1}{-\frac{x}{3} + \frac{C}{x^2}} = \frac{3x^2}{-x^3 + 3C}$$

y の式に戻すと

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{-x^3 + C} \quad (3C \text{ を } C \text{ とおいた})$$

一般解を得る .

(c) $y(1) = 1 + \frac{3}{C-1} = 2$ から $C = 4$. ゆえに特殊解

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{-x^3 + 4}$$

を得る .

解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は零点とする。

[1] 次の常微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos 3x$$

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 5y = 2\cos 2x$$

[2] 次の2階方程式の基本解を求め、そのロンスキー行列式が0でないことを確かめよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

[3] 次の2階常微分方程式の一般解を考える。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x$$

(1) $y = Ax + B$ の形で特殊解を求めよ。

(2) 一般解を求めよ。

[4] 次の2階常微分方程式の一般解を考える。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{4x^2} = 0$$

(1) $y = \sqrt{x}$ が解であることを示せ。

(2) 一般解を求めよ。

[解答例]

[1] (1) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$ (2) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{x}{6} \sin 3x$ (3) $y = C_1 \cos \sqrt{5}x + C_2 \sin \sqrt{5}x + 2 \cos 2x$

[2] 基本解は e^{3x}, xe^{3x} . ロンスキ-行列式 $W(e^{3x}, xe^{3x}) = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{pmatrix} = e^{6x} \neq 0$.

[3] (1) $y_p = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ (2) $y = C_1 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

[4] (1) 略 (2) $y = C_1 \sqrt{x} + \frac{C_2}{\sqrt{x}}$

解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は零点とする。

[1] 一般解を求めよ。

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad (2) \frac{dy}{dx} = 3x^2y + x^2 \quad (3) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \log x$$

[2] 次の微分方程式を、適当な変換の後、1階線形方程式にせよ。

$$\frac{dy}{dx} = x^2y^3 - \frac{y}{x}$$

[3] 時刻 t (年) の預金高を $P(t)$ とすると、利息(1年あたりの増加額)は $\frac{dP}{dt}(t)$ であるといえる。現在、一般的な銀行の普通預金の利息は毎年 0.002% ($= 2.0 \times 10^{-5}$) であるから

$$\frac{dP}{dt}(t) = (2.0 \times 10^{-5})P(t)$$

がなりたつ。時刻 $t = 0$ で 100 万円を預けたとき、101 万円になるのに何年かかるか。この方程式の特殊解を求めることにより考察せよ。必要があれば、 $\log 1.01 = 0.01$ を用いよ。

[4] 次の定数係数2階線形常微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0 \quad (2) \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = \cos x \quad (3) \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2 \cos 2x$$

[参考] 連立方程式 $\begin{cases} ax + by = k_1 \\ cx + dy = k_2 \end{cases}$ の解は行列式を用いて $x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b \\ k_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & k_1 \\ c & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ で与えられる(クラメルの公式)。

[解答例] [1] (1) 同次形 . $x - \frac{y^2}{x} = C$.

(2) 変数分離形 . $y = \frac{-1 + Ce^{x^3}}{3}$.

(3) 1階線形 . $y = \frac{x \log x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$.

[2] ベルヌーイ型 . $z = y^{1-3} = y^{-2}$ で z の方程式をかくと , $z' = \frac{2}{x}z - 2x^2$.

[3] 与えられた方程式を $P(0) = 100$ のもとで解くと $P(t) = 100e^{(2.0 \times 10^{-5})t}$. ここで $P(t) = 101$ とおくと ,

$$\frac{101}{100} = e^{(2.0 \times 10^{-5})t}.$$

両辺自然対数を取ると , $\log 1.01 = (2.0 \times 10^{-5})t$. $\log 1.01 = 0.01$ だから $t = 500$. 500 年後ということになる .

[4] (1) $y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$.

(2) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - \frac{5}{34} \cos x - \frac{3}{34} \sin x$.

(3) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x$.

解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は零点とする。

[問題] 次の常微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x \quad (2) \frac{dy}{dx} - y = e^{-x} \quad (3) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

[解答例] [1] (1) 同次形 . $x - \frac{y^2}{x} = C$.

(2) 変数分離形 . $y = \frac{-1 + Ce^{x^3}}{3}$.

(3) 1階線形 . $y = \frac{x \log x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$.

[2] ベルヌーイ型 . $z = y^{1-3} = y^{-2}$ で z の方程式をかくと , $z' = \frac{2}{x}z - 2x^2$.

[3] 与えられた方程式を $P(0) = 100$ のもとで解くと $P(t) = 100e^{(2.0 \times 10^{-5})t}$. ここで $P(t) = 101$ とおくと ,

$$\frac{101}{100} = e^{(2.0 \times 10^{-5})t}.$$

両辺自然対数を取ると , $\log 1.01 = (2.0 \times 10^{-5})t$. $\log 1.01 = 0.01$ だから $t = 500$. 500 年後ということになる .

[4] (1) $y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$.

(2) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - \frac{5}{34} \cos x - \frac{3}{34} \sin x$.

(3) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x$.

解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は零点とする。

1. 次の1階微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \frac{dy}{dx} = y \cos x \quad (2) \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + x^3 \quad (3) \frac{dy}{dx} = -y + xy^3$$

2. 次の2階線形微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) y'' + 9y = 3 \cos 3x \quad (2) y'' - 4y' + 4y = x^2 + 1$$

3. 2階方程式 $y'' - 6y' - 16y = 0$ に対して $y(0) = 5, y'(0) = 0$ の初期条件のもとでの特殊解を求めよ。

4. $y_1 = 1 + x, y_2 = e^x$ は2階方程式 $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ の基本解であることを示せ。

- [解答例] 1. (1) $Ce^{\sin x}$
- (2) $\frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}$
- (3) $(x + \frac{1}{2} + Ce^{2x})^{-1/2}$
2. (1) $C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{2}x \sin 3x$
- (2) $(C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{5}{8}$
3. $4e^{-2x} + e^{8x}$
4. ロンスキー行列式 $W(1+x, e^x) \neq 0$ を導き, $1+x, e^x$ が解であることをいう.

K.U.