微分積分学 I 昼 期末試験問題・解答　2000.8.2.(水)

[1]

$$F(x) = 2x^4 - 2\log|x| + \frac{9}{4}x^{4/3} - \frac{13}{4}$$

[2] 部分積分により

$$\int \log(x^2+x+2)dx = x\log(x^2+x+2) - \int x\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx.$$

$$I(x) = x\frac{2x+1}{x^2+x+2}$$

とおくと

$$I(x) = 2 - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{7}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}.$$

したがって，与式は

$$\begin{aligned} & x\log(x^2+x+2) - \int I(x)dx \\ = \; & x\log(x^2+x+2) - 2x + \frac{1}{2}\log(x^2+x+2) + \frac{7}{2}\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}(\frac{2}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{2})) \end{aligned}$$

よって

$$-2x + (x+\frac{1}{2})\log(x^2+x+2) + \sqrt{7}\tan^{-1}(\frac{2x+1}{\sqrt{7}})$$

[3] (1)　$0 < \varepsilon < 1$ として，置換積分により $t = 1 - x^2$ とおくと

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{5x}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx = \frac{5}{2}\int_{1-\varepsilon^2}^{1} t^{-1/4}dt = \frac{5}{2}\{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/4}\}.$$

よって

$$\int_0^1 \frac{5x}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 1+0}\int_0^{\varepsilon} \frac{5x}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx = \frac{10}{3}.$$

(2)　$b > 0$ として，部分積分を 2 回用いると

$$\int_0^b x^2e^{-x}dx = -b^2e^{-b} - 2be^{-b} - 2e^{-b} + 2.$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^n}{e^b} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

であるから

$$\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2e^{-x}dx = 2.$$