

ベクトル解析 夜 期末試験問題 2000.8.4.(水)

注意

- 答案用紙には学籍番号, 名前を書き, 表裏両面を使うこと.
- 答案用紙には答えのみでなく, それに至る過程も記述すること.
- 試験終了後, 解答は <http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm> に公表する.

[問題] 座標空間上の3点 $P(2, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 3)$ に対して折れ線

$$C : P \xrightarrow{C_1} Q \xrightarrow{C_2} R \xrightarrow{C_3} P$$

を定める.

- (1) 線分 C_1, C_2, C_3 の位置ベクトル表示 $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ をそれぞれ求めよ. t の動く範囲も忘れず明記せよ.

さて, ベクトル場 (ベクトル値関数) A を次で定める:

$$A = (y^2, 2x - 3z, yz)$$

- (2) A の C 上の線積分

$$\int_C A \cdot \frac{dr}{dt} dt$$

を求めよ.

次に, 平面 S を次で与える:

$$S : \begin{cases} \frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \end{cases}$$

- (3) S を表す方程式 $r(u, v)$ を求めよ. 忘れずに (u, v) の動く範囲を明記せよ.
 (4) S の法単位ベクトル n を求めよ. ただし, n の向きは S から原点 $(0, 0, 0)$ と反対の方向で定める.

さて, ベクトル場 (ベクトル値関数) B を

$$B = \nabla \times A \quad (A \text{ の回転})$$

で定める¹.

- (5) B の S 上の面積分

$$\int_S B \cdot n dS$$

を求めよ.

¹ $A = (A_x, A_y, A_z)$ のとき $\nabla \times A$ は $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ の第1行の展開で形式的に定義される. ただし, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.