ベクトル解析 夜 期末試験問題・解答　2000.8.4.(水)

[解答] 今回の期末試験ではストークスの定理のひとつの実例を考えたことになる．すなわち，荒っぽく言うと，曲面 S の境界線 C を考えて，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の C 上の線積分と $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の S 上の面積分は等しい：

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt = \int_S \nabla \times \boldsymbol{A}\, dS$$

(1)

$$C_1 : \boldsymbol{r}_1(t) = (2-2t, t, 0), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$
$$C_2 : \boldsymbol{r}_2(t) = (0, 1-t, 3t), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$
$$C_3 : \boldsymbol{r}_3(t) = (2t, 0, 3-3t), \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

(2)

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} dt = \frac{4}{3},$$
$$\int_{C_2} \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} dt = 6,$$
$$\int_{C_3} \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_3}{dt} dt = 0.$$

よって

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \frac{4}{3} + 6 + 0 = \frac{22}{3}.$$

(3) $x = u$, $y = v$ とおくとき $z = 3 - \frac{3}{2}u - 3v$. よって

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (u, v, 3 - \frac{3}{2}u - 3v), \quad (u, v) \in D,$$

ただし，D は $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, $v \leqq -\frac{u}{2} + 1$ をみたす領域.

(4)

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (\frac{3}{2}, 3, 1).$$

ゆえに

$$\boldsymbol{n} = (\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}).$$

(5)

$$\boldsymbol{B} = (z+3, 0, 2-2y)$$

であるから

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_D \boldsymbol{B} \cdot (\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}) dudv$$
$$= \iint_D (-2y + \frac{3}{2}z + \frac{13}{2})\, dudv = \iint_D (-\frac{9}{4}u - \frac{13}{2}v + 11) dudv = \frac{22}{3}.$$