２００１微分方程式 夜 期末試験問題・解答例

実施日：2001 年 7 月 28 日 (土) 6 限

[1] 同次式 $y' + 2y = 0$ は変数分離形より，$y = Ce^{-2x}$. $y = C(x)e^{-2x}$ とおいて，定数変化法を用いる．$C'(x) = e^{7x}$ をみたすので，$C(x) = (1/7)e^{7x} + C$. 以上から一般解は

$$y = e^{-2x}(\frac{1}{7}e^{7x} + C).$$

[2] (1) $Y'' = -4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x$ より $Y = -(1/4)$.

(2) 特性方程式 $t^2 + 4 = 0$ を解くと，$t = \pm 2i$. よって同次式の一般解は

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

したがって求める一般解は

$$y = -\frac{1}{4}x\cos 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

[3] $u = y^{-1}$ で変換すると

$$u' + \frac{u}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

の一階線型を得る．これを解くと

$$u = \frac{-\log|x| + C}{x}.$$

よって求める一般解は

$$y = \frac{x}{C - \log|x|}.$$

[4] 与式

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = F(t)$$

の一般解は $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$, ただし，$x_c(t)$ は $F(t) = 0$ としたときの一般解，$x_p(t)$ はある特殊解である．$\gamma > 0$ のとき，すべての場合について $x_c(t) \to 0\,(t \to \infty)$ であるので，$x_p(t)$ の挙動のみ考察すればよい．

(1) については $x_p(t) = A$, A は定数，とおくと，$x_p' = x_p'' = 0$ だから，これが特殊解になるためには $A = 1/\omega^2$ であればよい．すなわち，$t \to \infty$ のとき，運動はバネの自然長から $1/\omega^2$ 伸びたところで止まる．

(2) については $x_p(t) = Ae^{-t}$ とおくとき，これが特殊解になるには $A = 1/(1 - \omega + \omega^2)$ であればよい．したがって，$t \to \infty$ のとき $e^{-t} \to 0$ であるので，運動は自然長の位置に落ち着く．