２００１線形代数Ｉ夜 期末試験問題・解答例

実施日：2001 年 8 月 3 日 (金) 6 限

[1] -84

[2] (1) 第２列の展開は

$$7(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

一方，第３行の展開は

$$(-5)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

よって等しい．

(2) それぞれの成分の余因子を計算して，与えられた行列 A に対する余因子行列 $\tilde{A}$ を求めると

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -2 \\ 8 & -9 & 3 \\ 13 & -14 & 5 \end{pmatrix}$$

である．(1) から $|A| = -1$ であるから

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -8 & 9 & -3 \\ -13 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

[3] クラメルの公式を適用すると

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}} = \frac{b^2+b}{ab^2+a^2b} = \frac{b^2+b}{ab(a+b)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}} = \frac{a-a^2}{ab^2+a^2b} = \frac{a-a^2}{ab(a+b)}.$$

ここで a, b は $a = 1-\sqrt{2}$, $b = 1+\sqrt{2}$ であるので，

$$a+b = 2, \quad ab = -1.$$

また，$a^2 - 2a - 1 = 0$ より

$$a - a^2 = -a - 1 = -2 + \sqrt{2}.$$

また，$b^2 - 2b - 1 = 0$ より

$$b^2 + b = 3b + 1 = 4 + 3\sqrt{2}.$$

これらを代入すると

$$x = -\frac{4+3\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

を得る．