[1] $\mathbf{x}_1$ の長さが $\sqrt{3}$ より $\sqrt{a^2+1}=\sqrt{3}$, すなわち $a^2+1=3$. ゆえに $a=\pm\sqrt{2}$. 直交条件から内積 $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=2a-b=0$. ゆえに $b=2a$. 最後に $b>0$ であるから，これを満たすのは $a=\sqrt{2}$ のとき. よって $a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$.

[2]

$$\cos\theta=\frac{(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|}.$$

ここで $(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=-14$. $|\mathbf{a}_1|=\sqrt{10}$, $|\mathbf{a}_2|=\sqrt{30}$. よって $\cos\theta=-14/(10\sqrt{3})=-7/(5\sqrt{3})$. $\cos\theta<0$ であることから $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ のなす角は鈍角である（そのように作図すればよい）.

[3]

$$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$$

とおく. $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1$ として $\mathbf{b}_1$ を正規化すると

$$\mathbf{b}'_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

次に

$$\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}'_1)\mathbf{b}'_1.$$

$$(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}'_1)=-\frac{10}{\sqrt{10}}=-\sqrt{10}$$

よって

$$\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}+\sqrt{10}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}_2$ を正規化すると

$$\mathbf{b}'_2=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{b}'_1$, $\mathbf{b}'_2$ が求める正規直交基底である.

[4] (1) 固有方程式

$$\varphi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda-4)=0.$$

よって固有値は 1 と 4. 固有値 1 のとき固有ベクトルは方程式

$$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

よって $y=-2x$. これより

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\quad t\neq 0\quad \text{固有ベクトル}$$

$$V_1=V(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix})\quad \text{固有空間}$$

次に固有値 4 のとき固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

をみたす．よって $y = x$. これより

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0 \quad \text{固有ベクトル}$$

$$V_4 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \quad \text{固有空間}$$

(2) 略

[5] 固有方程式

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 10 & 8 \\ -5 & \lambda - 8 & -5 \\ 3 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda + 24 = (\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0.$$

固有値は $-2, 3, 4$. 固有空間は

$$V_{-2} = V(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}), \ V_3 = V(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}), \ V_4 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$