解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は零点とする．

[**1**] 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

(1)
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

(2)
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos 3x$$

(3)
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y = 2\cos 2x$$

[**2**] 次の 2 階方程式の基本解を求め，そのロンスキー行列式が 0 でないことを確かめよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

[**3**] 次の 2 階常微分方程式の一般解を考える．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x$$

(1) $y = Ax + B$ の形で特殊解を求めよ．
(2) 一般解を求めよ．

[**4**] 次の 2 階常微分方程式の一般解を考える．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{4x^2} = 0$$

(1) $y = \sqrt{x}$ が解であることを示せ．
(2) 一般解を求めよ．

[解答例]

[1] (1) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$ (2) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{x}{6} \sin 3x$ (3) $y = C_1 \cos \sqrt{5}x + C_2 \sin \sqrt{5}x + 2 \cos 2x$

[2] 基本解は e^{3x}, xe^{3x}. ロンスキー行列式 $W(e^{3x}, xe^{3x}) = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3xe^{3x} \end{pmatrix} = e^{6x} \neq 0.$

[3] (1) $y_p = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ (2) $y = C_1 xe^{-2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

[4] (1) 略 (2) $y = C_1\sqrt{x} + \frac{C_2}{\sqrt{x}}$