

解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は0点とする。

[1] 次の行列について以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 余因子をすべて求めよ。
- (2) 逆行列を求めよ。

[2] 次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

[3] 次の行列式を因数分解の形で求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & p & p^2 \\ 1 & q & q^2 \\ 1 & r & r^2 \end{vmatrix}$$

[4] 3次正方行列  $A$  の行列式  $|A|$  の値は  $-1$  である。このとき、 $A$  のすべての成分が整数ならばその逆行列  $A^{-1}$  の成分もすべて整数であることを示せ。

[解答例]

[1] (1)  $a_{11} = -4, a_{12} = -14, a_{13} = -16, a_{21} = -4, a_{22} = -28, a_{23} = -44, a_{31} = 4, a_{32} = 7, a_{33} = 16$

(2)

$$A^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -14 & -28 & 7 \\ -16 & -44 & 16 \end{pmatrix}$$

[2] -286

[3]  $(p - q)(q - r)(r - p)$

[4] 一般に

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

であるから,  $A^{-1} = -\tilde{A}$ .  $A$  の成分がすべて整数ならばその余因子はすべて整数. よって余因子行列  $\tilde{A}$  の成分はすべて整数. よって  $A^{-1}$  についても同じことが成立.