(注意)

- 解答用紙には**学籍番号，氏名を忘れずにかくこと**
- 解答は結果だけでなく，それに至る**過程を記述すること**．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ を求めよ．ただし，$\sin^{-1}x$ は $\sin x$ $(-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$ の逆関数である．

2. 関数 $\dfrac{\cos 2x}{x^2+1}$ の導関数を求めよ．

3. $(e^x)'=e^x$ を $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ から導け．

4. $f(x)=x^2e^{-x}$ の極値をすべて求めよ．

5. $f(x)=\log(1+2x)$ の 3 次のマクローリンの定理を求めよ．

6. 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\,dx$ を求めよ．

7. 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{x^3-5x^2+9x-5}\,dx$ を求めよ．

8. 定積分 $\displaystyle\int_1^e\sqrt{x}\,\log x\,dx$ を求めよ．

K.U.

[解答例]

1. $y=\sin^{-1}x$ とおくと $x=\sin y$. $x\to 0$ のとき $y\to 0$. よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

2. 商の微分公式から

$$\left(\frac{\cos 2x}{x^2+1}\right)'=-\frac{2\sin 2x}{x^2+1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\cos 2x.$$

3. $y=e^x$ とおくと $x=\log y$. 逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{1/y}=y=e^x.$$

4. $f'(x)=x(2-x)e^{-x}=0$ とおくと $x=0,2$. $f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$ で $f''(0)=2>0$ より $f(0)=0$ は極小値. 一方, $f''(2)=-2e^{-2}<0$ より $f(2)=4e^{-2}$ は極大値.

5.

$$\log(1+2x)=2x-2x^2+\frac{8}{3(1+2c)^3}x^3,$$

ただし, c は 0 と x の間.

6. $1-4x=t$ として置換積分を行うと

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\,dx=-\frac{1}{8}\sqrt{1-4x}+\frac{1}{24}(1-4x)^{3/2}+C.$$

これは部分積分でも解ける.

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\,dx=x\left(\frac{-1}{2}(1-4x)^{1/2}\right)-\int(x)'\frac{-1}{2}(1-4x)^{1/2}\,dx$$

として計算.

7.

$$\int\frac{x}{x^3-5x^2+9x-5}\,dx=\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log|x^2-4x+5|+\frac{3}{2}\tan^{-1}(x-2)+C.$$

8. 部分積分により

$$\int_1^e\sqrt{x}\log x\,dx=\frac{2}{9}e^{3/2}+\frac{4}{9}.$$

K.U.