

(注意)

- 解答用紙には学籍番号, 氏名を忘れずにかくこと
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること. 結果のみの解答の場合, その問の得点は0点とする.

1. 次のベクトル列について答えよ.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- (a) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は一次独立であるか, 一次従属であるか.
(b) 生成される部分空間 $V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ の次元を求めよ.

2. 線形写像 $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, の核 $\text{Ker } f$ を求めよ.

3. 空間 $V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ の正規直交基底を求めよ.

4. 3次正方行列 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有空間を求めよ.

5. 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ について, 次の問のうち 1つ を選択して答えよ.

- (a) 線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を定めるとき, 座標平面上に勝手に \mathbf{x} を与え $f(\mathbf{x})$ を作図せよ. ただし, \mathbf{x} は A の固有ベクトルに取ってはいけない.
(b) A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

[解答例]

1. (a) 一次独立

(b) $\dim V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2.$

2. $\text{Ker } f = V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

3.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 固有値は $-1, 1, 2$ の 3 つ . 固有空間は

$$V_{-1} = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_1 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

5. (a) 略

(b)

$$A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-3)^n + 4 \cdot 7^n & -2(-3)^n + 2 \cdot 7^n \\ -2(-3)^n + 2 \cdot 7^n & 4(-3)^n + 7^n \end{pmatrix}$$

K.U.