(注意)

- 解答用紙には**学籍番号，氏名を忘れずにかくこと**
- 解答は結果だけでなく，それに至る**過程を記述すること**．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．
- 解答は以下の Web ページに載せておくので参照せよ．
  `http://umeken.sakura.ne.jp/kenwiki/index.php`

1. 次の問に答えよ．
   (a) サイコロを 100 回投げて 1 の目が 25 回以上出る確率を求めよ。
   (b) ある都市の高校進学率は 99.8 %である．無作為に抽出した 1000 人のうち，高校に <u>進学しない人</u>が 5 人以上いる確率はどれぐらいか？
   (c) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbf{R}$, は確率密度関数の性質をみたすことを示せ．

2. 全生徒のテスト結果（得点）は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．次の問に答えよ．
   (a) $\sigma = 7$ (既知) であるとき，ある生徒 10 人の平均は 75, 分散は 100 であった．μ について信頼度 95 %の信頼区間を求めよ．
   (b) σ が未知のとき，ある生徒 n 人の平均は 75, 分散は 100 であった．μ について，信頼度 95 %の信頼区間の幅が (a) で求めた信頼区間の幅よりも狭くなるためには <u>少なくとも</u> n はどのくらいであれば良いか？理由を述べた上で次の中から選べ.
   (i) 15 (ii) 20 (iii) 25 (iv) 30

3. 視聴率 20 %を目標に番組を制作してきたが，調査した 300 世帯中 45 世帯がその番組を視聴していた．調査により 20 %を割ったことで責任問題が生じたが，制作担当者は「調査ではたまたま 20 %を割っただけで直ちに視聴率が 20 %を割ったとは決められない」と主張．さて，この主張を認めるべきか？危険率 5 %の検定により判定せよ．

4. A大学の男子学生の平均身長は 10 年前，171 cm であると言われていた．しかし近年，少し大きいような気がする．試しに無作為に 4 人を抽出してみたところ

$$178, 175, 188, 167 \text{ (cm)}$$

であった．身長の分布は正規分布に従うとしてよい．今年の平均身長は 10 年前よりも高いといえるか？危険率 5 %で検定せよ．

K.U.

[解答例]

1. (a) 1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B(100, 1/6)$ に従う．$n = 100$ は大きいとして正規分布 $N(16.7, 3.73^2)$ で置き換える．

$$Z = \frac{X - 16.7}{3.73} : N(0.1)$$

と標準化して $X = 25$ を代入する．$Z = z_0 = 2.23$. 求める確率は数表により

$$P(Z > 2.23) = 0.5 - P(0 < Z < 2.23) = 0.0129.$$

1.3 %である．

(b) 進学しない率 $p = 0.002$ は小さいとみる。$n = 1000$ は大きいとみる。よって 1000 人のうち進学しない数を X とするとき、X は $B(1000, 0.002)$ に従うが、これをポアソン分布 $\mathrm{Po}\,(2)$ (母数 $\lambda = np = 2$) で置き換える。 求める確率は数表により

$$P(X \geqq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} P(X = k) = 0.0527.$$

5.3 %である[1]．

(c) 本質的にチェックすべきは

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

である．実際,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = [\tan^{-1} x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

2. (a) 大きさ $n = 10$ の標本平均 $\overline{X}$ は定理 A により

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{10}} : N(0, 1)$$

に従う．95 %領域を考えて，μ について解くと

$$\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{10}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{10}}$$

$\sigma = 7$ と実現値 $\overline{X} = 75$ を代入して信頼度 95 %の信頼区間

$$70.66 < \mu < 79.34$$

を得る．

(b) σ が未知なので定理 B を用いる．$\nu = n - 1$ の t 分布を用いて 95 %領域をもとめる：

$$P_{n-1}(|T| > t_{n-1}) = 0.05.$$

---

[1] $B(1000, 0.002)$ を正規分布で置き換えると $N(2, 1.41^2)$. 標準化して

$$Z = \frac{X - 2}{1.41} : N(0, 1).$$

$X = 5$ を代入すると $Z = 2.13$. 求める確率は数表により

$$P(Z > 2.13) = 0.5 - 0.4834 = 0.0166.$$

1.7 %である．

これより U^2 を大きさ n の標本不変分散とするとき、95 %の信頼区間は

$$\overline{X} - t_{n-1}\frac{U}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{n-1}\frac{U}{\sqrt{n}}$$

である。実現値 $U = u$ を代入して，区間の幅は

$$2t_{n-1}\frac{u}{\sqrt{n}} = 2t_{n-1}\frac{s}{\sqrt{n-1}} = 2t_{n-1}\frac{10}{\sqrt{n-1}}.$$

ただし，$s^2 = 100$. よって幅は n と共に減少する． 順に n を代入すると $n = 25$ で初めて (a) で求めた幅 8.68 より小さくなる．

3. 帰無仮説 H_0 : 20 %である。標本 300 世帯中 X 世帯が見ているとすると，X は $B(300, 0.2)$ に従う．正規分布 $N(60, 6.93^2)$ で置き換えて，標準化して

$$Z = \frac{X - 60}{6.93} : N(0, 1).$$

実現値 $X = 60$ を代入して $Z = -2.16$. これは 5 %の棄却領域 $|Z| > 1.96$ に入るので H_0 は棄却．対立仮説 H_1 : 20 %を割った，を受け入れ，主張は認めるべきではない．

4. H_0 : 同じ．定理 B により，大きさ n の標本平均 $\overline{X}$, 標本不変分散 U^2 に対して

$$T = \frac{\overline{X} - 171}{U/\sqrt{4}} : \nu = 3 \text{ の } t \text{ 分布}.$$

実現値 $\overline{X} = 177$, $U = 8.68$ を代入すると $T = 1.38$. これは 5 %棄却領域 $|T| > 3.18$ に入らないから H_0 は受け入れざるを得ない．10 年前と同じといえる．

K.U.