(注意)

- 解答は解答用紙に書くこと.
- 解答用紙には**学籍番号，氏名を忘れずにかくこと**.
- 解答は結果だけでなく，それに至る**過程を記述すること**．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする.

1. $x = \sin^{-1}(\cos x)$ をみたす x をすべて求めよ．ただし，$\sin^{-1}$ は逆三角関数を表す

2. 次の関数の増減，凹凸，極値, x 軸との交点，$\lim_{x\to\infty} f(x)$ を調べ，グラフにせよ.

$$f(x) = e^{-x}(2-6x) \quad (x \geqq 0)$$

3. 次の関数の $x=0$ における 2 次近似多項式を求めよ.

$$f(x) = \log|\cos x|$$

4. 不定積分

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 6x + 4}\,dx$$

を求めよ.

5. 次の定積分を求めよ.

$$\int_1^e \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

K.U.

[解答例] **1.** 定義より

$$x = \sin^{-1}(\cos x) \iff \sin x = \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

これをみたす x は $x = \frac{\pi}{4}$.

2. $f(x) = e^{-x}(2-6x)$ に対して

$$f'(x) = e^{-x}(6x-8)$$

これより $f'(\frac{3}{4}) = 0$ で

$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{4}{3} &\implies f'(x) < 0 : f(x) \text{ は単調減少} \\ \frac{4}{3} < x &\implies f'(x) > 0 : f(x) \text{ は単調増加} \end{aligned}$$

さらに

$$f''(x) = e^{-x}(14-6x)$$

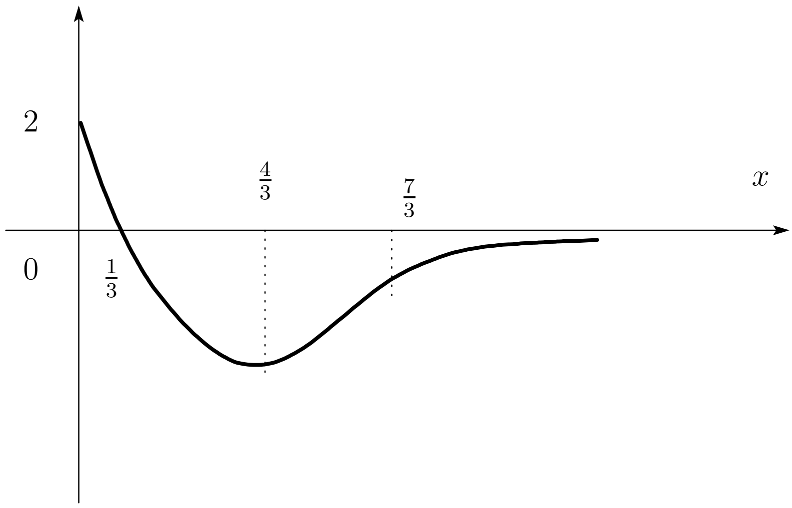
これより $f''(\frac{4}{3}) = 6e^{-4/3} > 0$. よって $f(4/3)$ は極小値.

$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{7}{3} &\implies f''(x) > 0 : f(x) \text{ は下に凸} \\ \frac{7}{3} < x &\implies f''(x) < 0 : f(x) \text{ は上に凸} \end{aligned}$$

最後にロピタルの定理から

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(2-6x) = 2\lim_{x\to\infty} e^{-x} - 6\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0 - 6\frac{1}{e^{x}} = 0$$

以上でグラフの概形は以下のようになる：



3. 2次近似多項式は

$$g(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

で与えられる．$f(0) = \log 1 = 0$,

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}, \quad \therefore\ f'(0) = 0.$$

さらに

$$f''(x) = \frac{-1}{\cos^2 x}, \quad \therefore\ f''(0) = -1.$$

以上で $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

4.

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 6x + 4} = 1 + \frac{5}{2}\frac{(x^2 - 6x + 4)'}{x^2 - 6x + 4} + 12\frac{1}{(x-3)^2 - \sqrt{5}^2}$$

より

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 6x + 4}dx = x + \frac{5}{2}\log|x^2 - 6x + 4| + \frac{6}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{x - 3 - \sqrt{5}}{x - 3 + \sqrt{5}}\right| + C$$

5. 部分積分により

$$\int_1^e \frac{\log x}{x^2}dx = \int_1^e (-x^{-1})'\log x dx = [-x^{-1}\log x]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x}\frac{1}{x}dx = 1 - \frac{2}{e}.$$

K.U.