(注意)

- 解答は解答用紙に書くこと．
- 解答用紙には**学籍番号，氏名を忘れずにかくこと**.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合その問の得点は 0 点とする．

以下，正方行列 A に対して $|A|$ は行列式を表し，A^k は A の k 個の積を表す．E_n は n 次の単位行列を表す．O は零行列を表す．

1. 次の連立方程式を考える．

$$\begin{aligned} 2x+3y+z+w &= -3 \\ x+2w &= 3 \\ 5y+z-3w &= -13 \\ -x-3y-2w &= 3 \end{aligned}$$

解がただ一つならばその解を求めよ．解が無数ならば具体的に５つ解を与えよ．解がなければ解なしと答えよ．

2. つぎの行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

3. 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & -6 \\ 8 & 15 & 5 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. n 次正方行列 A について次の問に答えよ．
 (a) $A^2+A+E_n=O$ をみたすとき A は正則であることを示し，A の逆行列を求めよ．
 (b) $A^2=O$ のとき，A は正則であるか？
 (c) ３次正方行列 A を繰り返し行基本変形する．このとき，

$$A \to \to \to \cdots \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となった．$|A|=0$ を示せ．
 (d) $AX=E_n$ ならば $XA=E_n$ を示せ．つまり

$$A \text{ が正則} \iff AX=E_n \text{ をみたす } n \text{ 次正方行列 } X \text{ が存在する}$$

を示せ．

K.U.

[解答例] **1.**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

特に $t = 0, \pm 1, \pm 2$ とおくと

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. 855

3. はき出し法，余因子行列を作る方法，いずれにしても逆行列は

$$\begin{pmatrix} 35/4 & -1/2 & 55/2 \\ -31/4 & 1/2 & -49/2 \\ 37/4 & -1/2 & 59/2 \end{pmatrix}$$

4. (a) 与式より

$$A(-A - E_n) = (-A - E_n)A = E_n$$

であるから A は正則で，$A^{-1} = -A - E_n$.

(b) $|A^2| = |O| = 0$, $|A^2| = |A|^2$ より，$|A|^2 = 0$. ゆえに $|A| = 0$. A は正則ではない．

(c) 条件よりある基本行列 $F_1, F_2, \dots, F_\ell$ があって

$$F_\ell \cdots F_2 F_1 A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であることが計算でわかるから，

$$|F_\ell \cdots F_2 F_1 A| = 0, \quad \therefore \ |F_\ell| \cdots |F_2||F_1||A| = 0.$$

基本行列は正則なので $|F_j| \neq 0$. よって $|A| = 0$ でなければならない．

(d) $AX = E_n$ より $|AX| = |E_n| = 1 \neq 0$. よって $|X| \neq 0$ で X は正則．X^{-1} が存在する．

$$XA = XAE_n = XA(XX^{-1}) = X(AX)X^{-1} = XE_nX^{-1} = E_n$$

K.U.