

関数論 期末試験問題 2000.2.15(火)

以下では i は虚数単位を表す。

- [1] 閉曲線 $C = C_1 + C_2 + C_3$ は図1で与えられる。 $f(z) = \text{Im } z$ (z の虚数部) に対して、複素積分

$$\int_C f(z) dz$$

を求めよ。

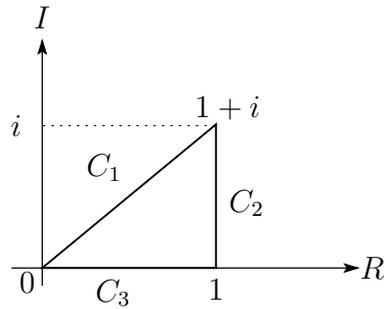


図 1

- [2] 図2の閉曲線 C に対して、複素積分

$$\int_C \frac{1}{z^2(z+3)(z-5i)} dz$$

を求めよ。

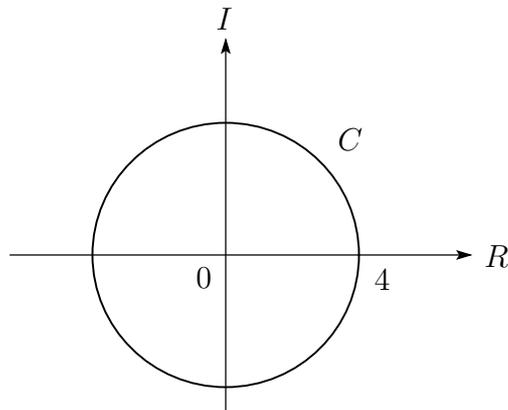


図 2

[3]

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C を図3のようにとるとき

$$\int_C f(z) dz$$

を求めよ. ただし, R は実数で $R > 1$ とする.

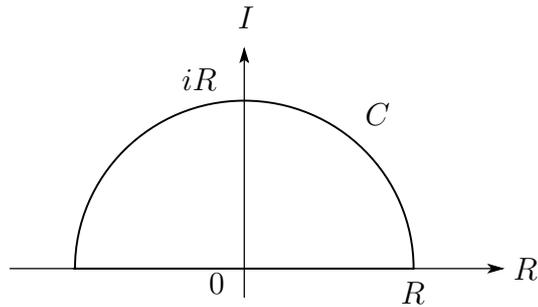


図 3

(2) (1) の結果を用いて, 実積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi$$

を示せ. ただし, 必要があれば次の不等式を用いよ.

$$|z| > 1 \quad \text{ならば} \quad 0 < |z| - 1 \leq |z + 1|$$