

線形代数 II (昼) 期末試験問題

1998/2/5(木)

[1] $\mathbf{R}^3$ のベクトル列

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ.

- (1) このベクトル列が一次独立であることを示せ.
- (2) このベクトル列から正規直交基底を作れ.

[2] 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

に対して線形写像 f_A を

$$f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$$

で定義するとき, f_A の像 $\text{Im } f_A$ の基底と核 $\text{Ker } f_A$ の基底を求めよ.

[3] 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ.

- (1) 行列 A の固有値, 固有空間を求めよ.
- (2) A が対角化可能 (すなわち, ある正則行列 P があって $P^{-1}AP$ が対角行列とできる) か否かを述べよ. もし可能ならば P と $P^{-1}AP$ を求めよ.

[3] 2次形式

$$F(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

について次の問に答えよ.

- (1) $F(x, y)$ を対称行列 を用いて表せ.
- (2) $F(x, y) = 1$ の標準形 $G(x', y') = 0$ を求めよ. さらにこのときの座標変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の行列 R を求めよ.

線形代数 II 中間試験問題

平成 10 年 11 月 26 日 (木)

- [1] 4 次元数ベクトル空間 R^4 の部分空間 V_1, V_2 をつぎのベクトルから生成される部分空間とする。

$$V_1 = V \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$
$$V_2 = V \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

このとき次の問に答えよ。

- (1) V_1 の基底を求め、次元 $\dim V_1$ を求めよ。
 - (2) 和空間 $V_1 + V_2$ の基底を求め、 $\dim(V_1 + V_2)$ を求めよ。
 - (3) $\dim(V_1 \cap V_2)$ を求めよ。
- [2] 線形写像 $f: R^3 \rightarrow R^3$ はつぎの左側のベクトルをそれぞれ右側のベクトルに写す。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

このとき、 $x \in R^3$ の非同次方程式

$$f(x) = b$$

が解を持つための b の条件を求めよ。

- [3] r 個の n 次元数ベクトル列 $a_1, \dots, a_r$ は $r \geq n+1$ ならば必ず一次従属になることを示せ。

線形代数 II 期末試験問題

1999 年 2 月 4 日 (木)

- [1] a, b を実数とする。3 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

について、 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の長さは共に $\sqrt{2}$ で、 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角は $\frac{\pi}{3}$ であるとき、 a と b を求めよ。

- [2] $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$V_1 = V \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

の正規直交基底 (ONB) を求めよ。

- [3] 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

について、対角化可能ならば $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ。

- [4] a を実数とする。3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

が対角化可能であるための a の条件を求めよ。

線形代数 II 中間試験問題 1999.11.25(木)

[1] a を実数とする。ベクトル列

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が一次独立であるための a の条件を求めよ。

[2] ベクトル列

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 4 \\ -21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

で生成される部分空間の基底を求めよ。

[3] 線形写像 $f: R^3 \rightarrow R^3$ はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

に写す。このとき

$$f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$$

を求めよ。

[4] A を n 次正方行列とする。 f を A から決まる線形写像とすると、もし $A^2 = O$ (零行列) ならば $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ であることを示せ。逆に $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ ならば $A^2 = O$ であることを示せ。

[5] 次の二つの連立方程式を考える。

$$\begin{cases} x + y - 2z &= b_1 \\ x - 2y + z &= b_2 \\ -2x + y + z &= b_3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x + 5y - z + 6w &= b_1 \\ x + 4y + 2z - 5w &= b_2 \\ -2x - y + 3z - 11w &= b_3 \end{cases}$$

二つの方程式が共に解をもつためのデータ

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

の集合（部分空間）の次元を求めよ。

線形代数 II 期末試験問題 2000.2.17(木)

[1] $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

からシュミットの直交化法を用いて正規直交基底 (ONB) を作れ。

[2] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対角化可能であれば対角化せよ。可能でないならば対角化可能でないと答えよ。

[3] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を直交行列 P で対角化せよ。

[4] 二次形式 $ax^2 + bxy + cy^2$, ($a > 0$, $c \neq 0$) について, $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ には一般に (i) 円 (ii) 楕円 (iii) 双曲線, の三つのタイプが現れる。

$$F(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2$$

について, $F(x, y) = 1$ がどのタイプになるかを調べよ。

(注意)

- (i) 解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は 0 点とする。
- (ii) 解答例については試験終了後、<http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm> を参照のこと。

1. (配点 5 点) R^2 において、ベクトル x を x 軸に対称なベクトルに写して、続けて長さ (大きさ) を $1/2$ にする、そのような写像 f の表現行列を求めよ。
2. (配点 15 点) ベクトル列

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ。

- (1) (5 点) a_1, a_2, a_3 は一次独立か一次従属かを判定せよ。
- (2) (10 点) 生成された部分空間 $V(a_1, a_2, a_3)$ の正規直交基底を求めよ。
3. (配点 10 点) α, β を実数とする。3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

を用いて線形写像 f を $f(x) = Ax$ で定義する。次の問に答えよ。

- (1) (5 点) $\dim \text{Ker } f = 1$ のとき、 α, β の満たす条件を求めよ。
- (2) (5 点) 連立方程式

$$Ax = b, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

の解の存在について考える。 $\beta = 1$ とする。どのようなデータ $b \in R^3$ に対しても解が存在するとき、 α の満たす条件を求めよ。

1.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & -9/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，一次従属．

(2) (1) より基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である．この順番に a_1, a_2 とするときシュミットの直交化法から

$$\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{330}} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -16 \end{pmatrix}$$

が正規直交基底である．

3. (1) 基本変形により

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 2 - \beta \\ 0 & 0 & \alpha - 2\beta + 1 \end{pmatrix}$$

であるから， $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ であるためにはパラメータが一つになればよいから， $\alpha - 2\beta + 1 = 0$.

(2) ここでは $\dim \operatorname{Im} f = 3$ であればよい．したがって，上の標準形から $\alpha - 2\beta + 1 \neq 0$. $\beta = 1$ だから $\alpha \neq 1$.

1. 次の行列の固有値, 固有空間を求めよ.

$$\begin{pmatrix} -4 & -10 & -8 \\ 5 & 8 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列は対角化可能であるか調べよ. 可能ならば対角化する正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

を用いて, 線形写像

$$f(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

を考える. ベクトル $x \in \mathbb{R}^2$ を勝手に描き, $f(x)$ を図示せよ.

4. 二次形式

$$F(x, y) = -3x^2 - 8xy + 3y^2$$

について方程式 $F(x, y) = 1$ は (x, y) 平面において

- (1) 円
- (2) 楕円
- (3) 双曲線

のいずれの形になるかを判定せよ.

5. ベクトル

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \end{pmatrix}$$

について $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は共に長さが $\sqrt{5}$ で, 互いに直交しているという. a, b を求めよ.

1. 固有空間

$$V_3 = V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right), V_4 = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), V_{-2} = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

2. 固有値 $1, -1$. $\dim V_1 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = 3$ だから対角化可能。

3. 固有空間

$$V_{-2} = V\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), V_5 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

に従って作図する .

4. 二次形式

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり ,

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値は $5, -5$ であるので , 異符号であることから双曲線になる .

5. ベクトル $a = b = -2$.

[1] $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

について, ベクトル列 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次従属となるような $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ を一つ求めよ. さらにその $\mathbf{a}_3$ で, $\mathbf{a}_1$ を $\mathbf{a}_2$ と $\mathbf{a}_3$ の一次結合で表せ.

[2] $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して部分空間

$$V_\lambda = V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$$

を考える.

- (1) $\lambda = 2$ のとき次元 $\dim V_2$ を求めよ.
- (2) $\dim V_\lambda = 2$ となる λ を求めよ. またそのときの V_λ の基底を求めよ.

[3]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) 線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ は一対一対応 (単射) であるか否かを調べよ．

次に

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

について連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える．

(2) 方程式が解を持つための $\mathbf{b}$ の条件を与えよ．

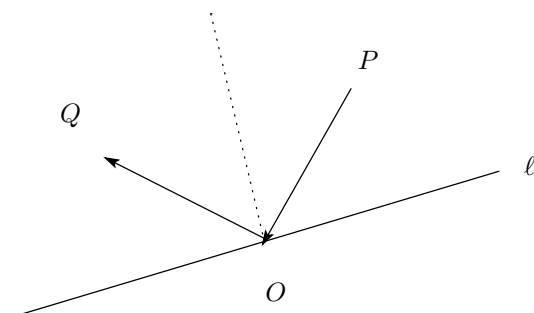
最後にもう一つの連立方程式を考える．

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_3 \end{cases}$$

(3) 2つの連立方程式が共に解を持つ，そのようなデータ $\mathbf{b}$ を次の中から (理由を述べた上で) 選べ．

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[4] 2次元平面上における直線 ℓ 上の点 O について次の問題を考える．平面上の勝手な点 P から O に光を当て ℓ に従って反射させ， O からの $\overline{PO}$ と等距離の点を Q とする (図参照)． O を $\mathbb{R}^2$ の原点， $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ ， $f(\mathbf{x}) = \overrightarrow{OQ}$ ， $\ell: y = 2x$ としたとき， f の表現行列を求めよ (f が線形写像であることは既知として良い)．



[1] 例えば $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ ならば $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次従属だから

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

そして, $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ である.

[2] (1) 基本変形により

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので $\dim V_2 = 3$.

(2) 同様に基本変形により

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5+12\lambda \\ 0 & 1 & 1+3\lambda \\ 0 & 0 & 3+8\lambda \end{pmatrix}$$

となり, $\dim V_\lambda = 2$ であるためには $3+8\lambda = 0$ であればよい. よって $\lambda = -3/8$. またこのとき列交換は必要ないので基底は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[3] (1) 基本変形により

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので f は単射である.

(2) (1) の基本変形により

$$\operatorname{Im} f = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right).$$

よって $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} f$.

(3)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とにおいて $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ とする. 基本変形により

$$B \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\operatorname{Im} g = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

よって 2 番目の連立方程式が解を持つための条件は $\mathbf{b} \in \text{Im}g$. したがって求める条件は $\mathbf{b} \in \text{Im}f \cap \text{Im}g$.
そこで

$$\mathbf{b} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく. x, y, u, v を未知数とする連立方程式の係数行列を基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

列交換は無いので

$$u - \frac{1}{2}v = 0$$

を得る. この関係を代入すると

$$\mathbf{b} = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

$v = 10/3$ とおくと

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

を得る.

[4]

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

[1] 次の各問いに答えよ .

(1) a, b を実数とする . $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$$

は互いに直交して , $\mathbf{a}_1$ の長さは $\sqrt{3}$, $\mathbf{a}_2$ の長さは $\sqrt{6}$ である . a, b を求めよ .

(2) $\mathbf{0}$ ではないベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は互いに直交している . $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は一次独立であることを示せ (一次独立の定義に戻って答えよ) .

(3) 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

の固有値 , 固有空間を求めよ . ただし , 固有空間の基底は正規直交基底で与えよ .

(4) 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -15 \\ 3 & -4 & -9 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を正則行列 P で対角化せよ .

[2] a, b, d を実数として二次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

について考える . 以下の問いに答えよ .

(1) $b \neq 0$ のとき A は常に相異なる 2 つの固有値を持つことを示せ .

(2) $a = -3, b = 0, d = 2$ とせよ . このとき $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で与えられる線形写像について , 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ を取り $f(\mathbf{x})$ を図示せよ .

(3) $a = 1, b = 2, d = -2$ とせよ . このとき (1) の結果から A は相異なる 2 つの固有値を持つ . 実際に計算によりこれらを求め , 対応する固有ベクトル , 固有空間も求めよ . さらに 2 つの固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交することを示せ .

(4) (3) の a, b, d のもとで , $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で与えられる線形写像について , 勝手なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ を取り $f(\mathbf{x})$ を図示せよ .

(5) (2), (4) の結果から思うところを記せ .

[1] (1) $a = b = -1$.

(2) $c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ とおく . 左辺と $\mathbf{x}_1$ で内積をとると , 双線形性から

$$0 = (\mathbf{x}_1, c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2) = c_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + c_2 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

直交条件から $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$. さらに $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = |\mathbf{x}_1|^2 \neq 0$. よって $c_1 = 0$ を得る . $\mathbf{x}_2$ と内積をとると , 同様に $c_2 = 0$ を得る . よって $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は一次独立である .

(3) 固有値 $-1, -2$. 固有空間

$$V_{-2} = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_{-1} = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

であるが , シュミットの直交化法により正規直交基底に取り直すと

$$V_{-2} = V\left(\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{357}} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix}\right), \quad V_{-1} = V\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(4) 固有値 $-1, 2, 3$. 固有空間

$$V_{-1} = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_3 = V\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

よって対角化可能であり ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を得る .

[2] (1) 固有方程式は

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2 = 0.$$

$\varphi_A(\lambda)$ の判別式を計算すると

$$(a + d)^2 - 4(ad - b^2) = (a - d)^2 + 4b^2.$$

$b \neq 0$ よりこれは常に正である . よって方程式は相異なる 2 実根を持つ . これは相異なる 2 つの固有値を持つことを意味する .

(2)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -3x \\ 2y \end{pmatrix}$$

よって x 成分を -3 倍して , y 成分を 2 倍したベクトルを $f(\mathbf{x})$ とすればよい .

(3) 固有値 $-3, 2$. 固有空間

$$V_{-3} = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

それぞれに属するベクトルを勝手にとって内積をとると 0 であるから 2 つの固有空間は直交する .

(4) 略

(5) (4) の A の固有空間が互いに直交することから , (4) の写像を描くためには座標軸を固有空間に従って回転させ , (2) の写像を描くようにすればよいことがわかる .

最後に余談だが学生の解答の中のひとつ : 「 (2), (4) の結果から思うことは自分には学力がないということのみでした ... 」 再起を期待したいと思います , 頑張り !

[1] ベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について次の問に答えよ .

(1) ベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 19 \\ -18 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ の一次結合で表せ .

(2)

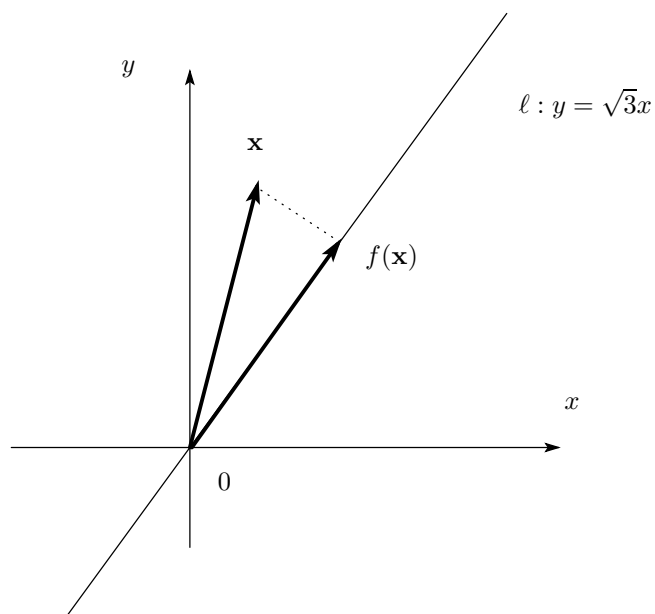
$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -7 \end{pmatrix}$$

とする . ただし , α は実数である . ベクトル列 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次独立となるような α の条件を求めよ .

[2] 次の部分空間 V_1, V_2 について , 和空間 $V_1 + V_2$ の基底を求めよ . さらに積空間 $V_1 \cap V_2$ の次元を求めよ . ただし , V_1, V_2 の基底はこのとおり自明であるとはいえないことに注意せよ .

$$V_1 = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

- [3] 図のように $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\mathbf{x})$ を定義する． $f(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}$ の直線 ℓ 上の射影という． f の表現行列 A を求めよ． f は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像であることが知られている．



- [4] 次の線形写像は全射であるか否か，単射である否かを判定せよ．

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

[1] (1) $\mathbf{a} = 3\mathbf{a}_1 + 8\mathbf{a}_2$.

(2) $\alpha \neq 7$.

[2]

$$V_1 + V_2 = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ であるので , 次元定理から

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 1.$$

[3]

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

であることが実際の作図により確かめられる . よって表現行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

[4] 表現行列を基本変形すると標準形は単位行列にならないので , 単射でも全射でもない .

[1] 次の部分空間 V の正規直交基底を求めよ .

$$V = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

[2] 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

を , その固有値 , 固有空間を求めることにより対角化せよ . すなわち , $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な 3 次正方行列 P とその対角行列を求めよ .

[3] $\mathbf{R}^2$ における線形写像

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x$$

について , 任意に x を与えて $f(x)$ を作図せよ .

[1]

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

においてシュミットの直交化法を用いると，正規直交基底

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る．

[2] 固有多項式 $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ から固有値 $1, 2, 3$. 固有空間

$$V_1 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_3 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

それぞれの基底を列ベクトルとして並べて正則行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で定義すると，対角行列

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を得る．

[3] 固有方程式 $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$ から固有値 $1, 5$. 固有空間

$$V_1 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right), \quad V_5 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

を得る．作図については以下のとおり．それぞれの基底

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

で決まる新しい $\mathbf{R}^2$ の座標軸に従って $x \in \mathbf{R}^2$ を 2 つの固有ベクトルに分解する．分解したベクトルに f を作用させると，固有ベクトルの性質からそれぞれ固有値倍のベクトルになる．これらを再び合成することにより $f(x)$ の作図が完成する．

解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は0点とする。

[1] a, b は次の条件をすべてみたす。 a, b を求めよ：(1) 生成される部分空間の次元について、

$$\dim V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ a \end{pmatrix}\right) = 2$$

(2) 2つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

のなす角は $\frac{\pi}{3}$ で、かつ $\mathbf{x}$ の大きさは $|\mathbf{x}| = 1$ 。

[2] 次の行列について、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) 固有値、固有空間を求めよ。
- (b) それぞれの固有空間の基底を正規直交基底に取り直せ。
- (c) A を対角化せよ。

[3] 伝染病のモデルを考える。それぞれ、

健康な状態： α

病気の状態： β

死亡： γ

とする。翌月に掛けて、健康な人の $\frac{1}{2}$ が発病して、病気の人の $\frac{1}{3}$ が健康に回復して $\frac{1}{3}$ が死に至る。このような比率で毎月 α, β, γ の人口は推移しているとする。 α, β, γ の初期条件(ある月の人口)をそれぞれ、 x_0, y_0, z_0 とする。

(a) 一ヶ月後の α, β, γ のそれぞれの人口を x_1, y_1, z_1 とするとき、写像

$$f: \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

の表現行列 A を求めよ。

(b) f は全射であるか。

(c) $x_0 = 100, y_0 = z_0 = 0$ とする。 n ヶ月後の α, β, γ のそれぞれの人口 x_n, y_n, z_n を求めよ。さらに、定常状態 ($n \rightarrow \infty$) では全員死に至ることを導け。

[4] 方程式

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$$

をみたす曲線 (x, y) は 楕円、双曲線 のどちらか。標準形を求めよ。

[解答例] [1] 誠に申し訳ないことですが, [1] は問題が不適であることがわかりました. このような a, b は存在しません. 出題者としてお詫びします. 全員に [1] の配点分 (25 点) を加算します.

[2] (a) 固有方程式 $(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$. ゆえに $\lambda = -1, 2$ (固有値). 固有空間を求める. -1 について,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_{-1} \implies x + y + z = 0.$$

よって $y = t, z = s$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

つまり

$$V_{-1} = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

同様にして, 2 について,

$$V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(b) V_{-1} について, シュミットより,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき, 直交化する.

$$\mathbf{b}'_1 = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1/2) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b}'_2 = (1/|\mathbf{b}_2|)\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

以上から

$$V_{-1} = V\left(\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\right) \quad \text{正規直交基底}$$

V_2 については正規化して

$$V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\right) \quad \text{正規直交基底}$$

(c) $\dim V_{-1} + \dim V_2 = 3$ より対角化可能 . (a) より

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とみると P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{対角行列}$$

[3] (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) 基本変形により

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank } A = 2$ だから全射ではない .

(c) まず

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

であることに注意 . A^n が求まれば良い . A^n を求めるために A を対角化する . A の固有方程式

$(1/6)\lambda(\lambda-1)(6\lambda-5) = 0$. ゆえに $\lambda = 0, 5/6, 1$ (固有値) . よって A は対角化可能 . それぞれの固有空間を求める .

$$V_0 = V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$V_{5/6} = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$V_1 = V\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

P として

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とみると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{対角行列}$$

P^{-1} を基本変形により与える：

$$(P E_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (E_3 P^{-1})$$

以上を用いて

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5/6)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5/6)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 & 0 \\ -3/5 & -2/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3/5)(5/6)^n & (2/5)(5/6)^n & 0 \\ (3/5)(5/6)^n & (2/5)(5/6)^n & 0 \\ 1 - (6/5)(5/6)^n & 1 - (4/5)(5/6)^n & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

初期値から

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/5)(5/6)^n & (2/5)(5/6)^n & 0 \\ (3/5)(5/6)^n & (2/5)(5/6)^n & 0 \\ 1 - (6/5)(5/6)^n & 1 - (4/5)(5/6)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60(5/6)^n \\ 60(5/6)^n \\ 100 - 120(5/6)^n \end{pmatrix}.$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $(5/6)^n \rightarrow 0$ だから

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって全員死亡する．

[4]

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{対称行列}$$

A を直交行列 U で対角化する．固有値 2, 4. 共に正であるから 楕円である．標準形を求める．それぞれの固有空間：

$$V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_4 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

それぞれの基底を正規化して

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とおくと U は直交行列であり，

$${}^t U A U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A=U\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}{}^tU.$$

代入，

$$1=3x^2-2xy+3y^2=(x\ y)U\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}{}^tU\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}={}^tU\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad \text{新座標}$$

とおくと

$$(x\ y)U\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}{}^tU\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(X\ Y)\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=2X^2+4Y^2.$$

最終的に

$$\frac{X^2}{(1/\sqrt{2})^2}+\frac{Y^2}{(1/2)^2}=1\quad \text{楕円}$$

を得る．

- 試験時間は60分とする。
- 解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。
- 1題以上正答の場合、合格とする。それに達しない場合は不合格とする。部分点は考慮しない。

[1] 次の行列が対角化可能ならば対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2] 2次正方行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について、 B^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

[3] 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は次で与えられる: 「ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ を直線 $y = x$ に関して対称に写し、続けて原点中心に $\frac{\pi}{3}$ -回転させる」 f の表現行列を求めよ。また、 f は単射であるか?

解答は解答用紙に記入し，結果だけでなくそれに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は0点とする．

- [1] 3つの3次元列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ で3次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ をつくる． A が正則ならばベクトル列 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立であることを示せ．

- [2] 生成される部分空間 $V_1 = V\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$ について次の問に答えよ．

- (1) 次元 $\dim V_1$ を求めよ．
(2) V_1 の正規直交基底を求めよ．

- [3] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ．

- (1) 線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ は全射であるか，答えよ．
(2) A の固有値，固有空間を求めよ．
(3) A は対角化可能であるか．可能ならば対角化せよ．

次の2問のうち1問を選択して答えよ．

- [4] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ．

- [5] $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ．

- (1) $\mathbf{x}$ を勝手に与えて $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を作図せよ．
(2) A の安定性について論じよ．

[解答例] [1] A が正則ならば基本変形により単位行列に変形される．したがってこれは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次独立であることを示す．

[2] (1) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ を基本変形すると第 2 列と 3 列を一度交換した後，ランク 2 の標準形に変形される．したがって， $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ が基底の 2 次元．

(2) (1) の基底をそれぞれ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ と置き，シュミットの直交化法を適用すると正規直交基底として $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ を得る．

[3] (1) A を基本変形すると単位行列になるので全射である．

(2) 固有値 $-1, -2$. 固有空間 $V_{-1} = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), V_{-2} = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(3) $\dim V_{-1} + \dim V_{-2} = 3$. A の次数と一致するので対角化可能． $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 対角行列.}$$

[4] A の固有値 $-3, 2$. 固有空間 $V_{-3} = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. A を対角化すると $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ として， $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $A^n = P \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$. 計算すると

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(-3)^n + 2^{n+2}}{5} & \frac{(-2)(-3)^n + 2^{n+1}}{5} \\ \frac{(-2)(-3)^n + 2^{n+1}}{5} & \frac{4(-3)^n + 2^n}{5} \end{pmatrix}$$

を得る．

[5] (1) 略 (2) A の固有値は 1 と $-5/12$. したがって弱安定である．

試験時間は 60 分とする．解答は解答用紙に記入し，結果だけでなくそれに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

1. 次の行列を対角化せよ． $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. 二つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のなす角は $\frac{\pi}{3}$ である． x を求めよ．

3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -17 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ を用いて線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を考える． f が全射かつ単射であるとき， a の条件を求めよ．

K.U.

(注意)

- 解答用紙には学籍番号, 氏名を忘れずにかくこと
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること. 結果のみの解答の場合, その問の得点は0点とする.

1.

(a) ベクトル列

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

は一次独立であるか, 一次従属であるか?

(b) ベクトル

$$\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の一次結合で表せ.

2. 2つの2次元部分空間 V_1, V_2 :

$$V_1 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = V\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

について, 和空間 $V_1 + V_2$ の基底を 正規直交基底 で与えよ.

3. $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ の線形写像 f, g :

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n, \\ g: \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

について, 合成写像 $g \circ f$ が単射ならば f と g は 共に単射 であることを示せ.

4. 3次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有空間を求め (可能ならば) 対角化せよ.

5. 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$ に対して, A^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

[解答例]

1. (a) 一次独立
(b)

$$\mathbf{a}_4 = \frac{9}{7}\mathbf{a}_1 + \frac{4}{7}\mathbf{a}_2 - \frac{6}{7}\mathbf{a}_3$$

2.

$$V_1 + V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

であるが，基本変形によりその基底は

$$V_1 + V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

で与えられる．シュミットの直交化法により

$$V_1 + V_2 = V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

3. f の表現行列を A , g の表現行列を B とするとき， A, B は n 次正方行列である．そして，合成写像 $g \circ f$ の表現行列は BA (積) で与えられる．いま $g \circ f$ が単射ならば BA は基本変形により単位行列に変形される．すなわち， BA は正則でその行列式 $|BA|$ は 0 でない．行列式の性質から

$$|BA| = |B||A|.$$

よって $|A|$ も $|B|$ も 0 ではない．よって共に正則．つまり基本変形により共に単位行列に変形できる．ゆえに f, g は共に単射である．

4. 固有方程式

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

から固有値は 1, 2. 固有空間を求めると

$$V_1 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad V_2 = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$\dim V_1 + \dim V_2 = 3$ より対角化可能．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくならば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る．

5. 固有値は $-1, 2$ である． -1 の固有ベクトルに $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 2 の固有ベクトルに $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとり

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る。これより

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

計算から

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(-1)^n + 3 \cdot 2^n & -3(-1)^n + 3 \cdot 2^n \\ 2(-1)^n - 2 \cdot 2^n & 3(-1)^n - 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

K.U.

(注意)

- 解答用紙には学籍番号, 氏名を忘れずにかくこと
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること. 結果のみの解答の場合, その問の得点は0点とする.

1. 次の条件を すべてみたす 3次元ベクトル a, b を具体的に一組作れ.

- a と e_3 の内積は負値: $(a, e_3) < 0$. ただし, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- b と e_2 の内積は正值: $(b, e_2) > 0$. ただし, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a と b は一次従属

2. 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化可能であるか? 可能ならば対角化せよ, 可能でなければ理由を述べて可能でないと答えよ.

[解答例] 1.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

2. 固有値は 1, 2. それぞれの固有空間の次元は $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$ であるので, $\dim V_1 + \dim V_2 = 2 \neq 3$ となって対角化可能でない.

(注意)

- 解答は解答用紙に書くこと .
- 解答用紙には学籍番号 , 氏名を忘れずにかくこと .
- 解答は結果だけでなく , それに至る過程を記述すること . 結果のみの解答の場合 , その問の得点は 0 点とする .

1. 生成される部分空間 $V_1 = V\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ について ,

(a) V_1 の基底を求めよ .

(b) (a) で求めた基底から V_1 の正規直交基底を取り直せ .

2. 線形写像 $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & \alpha \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ が全射かつ単射であるとき , α の条件を求めよ .

3. 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ の固有空間をすべて求めよ .

4. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ .

(a) 2 次正方行列 P を明示して , $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ .

(b) (a) の結果から , xy 平面上に $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ を任意に与えて $A\mathbf{x}$ を表現せよ .

[解答例]

$$1. \text{ (a) } V_1 = V\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{ (b) } V_1 = V\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$2. \alpha \neq 4$$

$$3. \text{ 固有値 } -1 \text{ のとき、} V(-1) = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\text{固有値 } -2 \text{ のとき、} V(-2) = V\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$4. P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ とおくとき、} P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

K.U.