微分積分学 I 中間試験問題・解答例　2000.6.14(水)

[1]

$$x = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

[2] 三角関数 $y = \cos x$ の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると減少関数になるので値域 $-1 \leqq y \leqq 1$ を定義域とする逆関数が存在する．この逆関数を $x = \cos^{-1} y$ と定める．

[3]

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

[4]

$$\frac{1}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

[5] $f(x) = e^{-x} - \cos x$ とおき 2 次のマクローリンを適用．$f(0) = 0$．$f'(x) = -e^{-x} + \sin x$．$f'(0) = -1$．$f''(x) = e^{-x} + \cos x$．$f''(c) = e^{-c} + \cos c$．

$$f(x) = -x + \frac{e^{-c} + \cos c}{2} x^2, \quad c \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間.}$$

ゆえに

$$\frac{e^{-x} - \cos x}{x} = -1 + \frac{e^{-c} + \cos c}{2} x.$$

$x \to 0$ のとき $c \to 0$．よって

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} = -1.$$

[6] $f(x) = \sqrt{1+x}$ に 3 次のマクローリンを適用すると

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}}, \quad 0 < c < x.$$

$x = 10^{-3}$ として誤差を測ると

$$\frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}} < \frac{10^{-9}}{16}.$$