微分積分学 I 中間試験問題・解答例　2000.6.30(金)

[1]

$$\frac{8}{\sqrt[4]{2}}$$

[2]

$$3a+2b-1$$

[3] (1) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(2) 半角の公式を用いる．$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

$\sin\frac{\pi}{12} > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

さらに 2 重根号をはずして

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

と答えるとなお良い．

(3) $\cos x$ の加法定理を用いる．

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

[4] (1) $8x^3+6x^{-3}-\frac{1}{6}x^{-4/3}$.

(2) 積の公式を使う．

$$e^{-x}(\frac{3}{1+3x} - \log(1+3x)).$$

(3) 商の公式を使う．

$$\frac{2(1-x^2)\cos 2x + x\sin 2x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

[5] $y=\tan^{-1}x$ とおく．$x=\tan y$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

だから
$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

[6]
$$y = x^{\log x}$$
とおく．両辺 log をとると
$$\log y = \log x^{\log x} = (\log x)^2.$$
両辺を x で微分すると
$$\frac{y'}{y} = 2(\log x)\frac{1}{x}.$$
したがって
$$y' = \frac{2x^{\log x}\log x}{x}.$$

[7] 略

[8] $f(\pi) = -1$. $f'(x) = -\sin x$. $f'(\pi) = 0$. $f''(x) = -\cos x$. $f''(\pi) = 1$. $f'''(x) = \sin x$. $f'''(c) = \sin c$.
$$\cos x = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + \frac{\sin c}{6}(x-\pi)^3.$$
ただし，c は π と x の間.