２０００微分積分学 II 中間試験問題・解答例

2000 年 12 月 1 日 (金) 実施

1. 接平面の方程式は

$$S(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y$$

である．

$$f_x=-3e^{y-3x}\cos(x-2y)-e^{y-3x}\sin(x-2y)$$

$$f_y=e^{y-3x}\cos(x-2y)+2e^{y-3x}\sin(x-2y)$$

であるので，$f_x(0,0)=-3,\ f_y(0,0)=1.\ f(0,0)=1$ より

$$S(x,y)=1-3x+y.$$

これより，近似値

$$S(10^{-3},\frac{10^{-3}}{2})=1-\frac{5}{2}10^{-3}=0.9975$$

を得る．

2. $x=0$ として y 軸に沿って $(x,y)\to(0,0)$ とすると

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{0}{y^4}=0.$$

一方，$x=y^2$ に沿って $(x,y)\to(0,0)$ とすると

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}.$$

よって極限値は存在しない．

3.　合成関数の微分法から

$$\begin{aligned} f_u &= f_x x_u+f_y y_u \\ &= \frac{-y^4}{1-x}2u+4y^3\log(1-x)\cdot v^3. \end{aligned}$$

$$g(x,y)=\frac{-y^4}{1-x}$$

$$h(x,y)=4y^3\log(1-x)$$

とおくとき

$$\begin{aligned} f_{uv} &= g_v 2u+h_v v^3+h\cdot 3v^2 \\ &= (g_x x_v+g_y y_v)2u+(h_x x_v+h_y y_v)v^3+h\cdot 3v^2 \\ &= (\frac{-y^4}{(1-x)^2}+\frac{-4y^3}{1-x}3uv^2)2u+(\frac{-4y^3}{1-x}+12y^2\log(1-x)\cdot 3uv^2)v^3+4y^3\log(1-x)\cdot v^3 \end{aligned}$$

$(u,v)=(1,-1)$ のとき $(x,y)=(0,-1)$. したがって $f_{uv}=18$.

4.

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$f_y = -3x + 2y = 0$$

を解くと，$(x, y) = (0, 0)$, $(3/2, 9/4)$ を得る．

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = -3,\ f_{yy} = 2$$

であるので，判別式 D を計算すると

$$D(0, 0) = 9 > 0$$

だから $(0, 0)$ は極値点ではない．一方，

$$D(3/2, 9/4) = -9 < 0$$

であり，$f_{xx}(3/2, 9/4) = 9 > 0$ なので $f(3/2, 9/4) = 27/16$ は極小値である．