関数論 中間試験問題・解答例

2000 年 12 月 12(火) 実施

以下において，i は虚数単位を表す.

1.
$$-1-i=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$
より $z=re^{i\theta}$ とおくと
$$r^4=\sqrt{2},$$
$$4\theta=\frac{5\pi}{4}+2n\pi.$$
$0\le\theta<2\pi$ で解を求めると
$$z=2^{1/8}e^{i\frac{5\pi}{16}},\ 2^{1/8}e^{i\frac{13\pi}{16}},\ 2^{1/8}e^{i\frac{21\pi}{16}},\ 2^{1/8}e^{i\frac{29\pi}{16}}$$

2. 略

3. (1) 正則ではない. $u=x^2, v=y^2$ とおくとき $u_x=2x, v_y=2y$ でコーシー・リーマンの方程式を満たさない.
(2) 正則である.
$$\sin z=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x+i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x$$
であるから
$$u=\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x,\ v=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x$$
からコーシー・リーマンの方程式をみたす.
$$(\sin z)'=u_x+iv_x=\cos z$$
を得る.

4.
$$z=-\log(4+\sqrt{17}),\ \ \pi-\log(\sqrt{17}-4).$$

5.
$$\cos(\frac{\pi}{2}+i)=\frac{e^{-1}-e}{2}i=\frac{-e^{-1}+e}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$\log(\cos(\frac{\pi}{2}+i))=\log\frac{e-e^{-1}}{2}-i\frac{\pi}{2}.$$