２０００線形代数 II 中間試験問題・解答例

2000 年 12 月 1 日 (金) 実施

1. (1) 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから一次従属.

(2) まず，基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，シュミットの直交化法から正規直交基底は

$$\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. (1)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\mathrm{Im} f = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(2) 解空間の広さの問題であるから $\mathrm{Ker} f$ を調べて，$\mathrm{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せばよい．つまり $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ がただ一つ解 $(\mathbf{0})$ をもつことを言えばよい.

$$A \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta - 1 \\ 0 & 1 & 2 - \beta \\ 0 & 0 & \alpha - 2\beta + 1 \end{pmatrix}$$

から $\alpha - 2\beta + 1 \neq 0$ であればよい．つまり，基本変形が続けられて標準形は E_3 になる.