

ベクトル解析 中間試験問題 2000.6.7(水)

[1] ベクトル $A = (1, -1, 2)$, $B = (0, -1, 3)$ に対して $C = A \times B$ (外積) とするとき

$$(A + B + C) \cdot (A - B - C) \quad \text{内積}$$

を計算せよ .

[2] 標高がスカラー場 $\varphi(x, y) = x(y - 1) + y^2$ で与えられている . 次の問いに答えよ .

- (1) 地点 $(1, -2)$ における勾配 $\nabla\varphi(1, -2)$ を求めよ .
- (2) 地点 $(1, -2)$ において , 方向 $(2, -1)$ と方向 $(0, 3)$ のどちらが勾配がきついと考えられるか . 方向微分係数を比較して答えよ .
- (3) 勾配の大きさ $|\nabla\varphi|$ が最小となる地点 (x, y) を求めよ .

[3] $r = (x, y, z)$ を位置ベクトル , $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする . 次の計算をせよ .

(1) ∇r

(2) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} \right)$

(3) $\nabla \times (\nabla r)$

[4] 海底探査機メイビット号は時刻 t における位置ベクトル

$$\mathbf{r}(t) = (\sin \pi t, -\cos \pi t, -ct^2)$$

に従って航行中である . ただし , c は正の定数である . ある基準点 $(0, 0, 0)$ から水平方向たてを x 成分 , 横を y 成分 , そして水深を z 成分で表す . 例えば $(4, 5, 0)$ はたて 4, 横 5 の水面上を表し , $(4, 5, -5)$ はたて 4, 横 5, 水深 5 の地点を表す . 次の問いに答えよ .

- (1) 乗組員の安全のため加速度の大きさ $|\mathbf{a}(t)|$ を $2\pi^2$ 以下に押さえたい . 定数 c はどの範囲にとれば良いか , c のとる範囲を求めよ .
- (2) $c = 1$ としたとき , 時刻 5 に海底に到達した . 到達地点 A を求めよ .
- (3) 探査を終えたメイビット号は (2) で求めた地点 A (時刻 0) を出発して時刻 t における速度

$$\mathbf{v}(t) = (6t^2, t - 1, e^{2t})$$

で帰還を始めた . 水面に到達する時刻を求めよ .