ベクトル解析 中間試験問題・解答　2000.6.7(水)

[1]

$$-15$$

[2] (1)

$$\nabla\varphi(x,y) = (y-1, x+2y)$$

より

$$\nabla\varphi(1,-2) = (-3,-3).$$

(2)　$(2,-1)$ 方向の方向微分係数は $-\sqrt{3}/5$. $(0,3)$ 方向の方向微分係数は -3. したがって $(0,3)$ 方向の方が勾配がきついと考えられる.
(3)

$$|\nabla\varphi| = \sqrt{(y-1)^2+(x+2y)^2}$$

だから，$|\nabla\varphi| = 0$ となる x, y があればそれが求める地点となる．実際，$y=1, x=-2$ が求める地点.

[3] (1)

$$\nabla r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right).$$

(2)

$$\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}.$$

(3)　勾配の回転は零ベクトルだから

$$\nabla\times(\nabla r) = \mathbf{0}.$$

[4] (1)　加速度ベクトルは

$$\boldsymbol{r}''(t) = (-\pi^2\sin\pi t,\ \pi^2\cos\pi t, -2c).$$

条件

$$|\boldsymbol{r}''(t)| = \sqrt{\pi^4+4c^2} \leqq 2\pi^2$$

より

$$c \leqq \frac{\sqrt{3}\pi^2}{2}$$

を得る.
(2)　$c=1$ を代入して $\boldsymbol{r}(5)$ を求めると

$$(0, 1, -25).$$

(3) 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ から位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を与える公式

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^t \boldsymbol{v}(t)dt$$

を用いる．$\boldsymbol{r}(0) = (0, 1, -25)$ として計算すると $\boldsymbol{r}(t)$ の z 成分は

$$-\frac{51}{2} + \frac{e^{2t}}{2}.$$

したがって，z 成分が 初めて 0 になるときが求める時刻であるから

$$t = \frac{\log 51}{2}$$

を得る．