２００１微分方程式 夜 中間試験問題・解答例

実施日：2001 年 6 月 9 日 (土) 6 限

[1]

$$y' = e^{-2x} - 2xe^{-2x}, \quad y'' = -4e^{-2x} + 4xe^{-2x}$$

より，それぞれ左辺の式に代入して 0 になることを確かめる．

[2] 右辺について不定積分を行うと

$$y' = 2\sin\frac{x}{2} + C \quad （C \text{ は定数}）.$$

さらに右辺について不定積分を行うと

$$y = -4\cos\frac{x}{2} + Cx + D \quad （D \text{ は定数}）.$$

$y'(0) = 1$ より $C = 1$. そして $y(0) = 0$ より $D = 4$. よって特殊解は

$$y = -4\cos\frac{x}{2} + x + 4.$$

[3]

$$\frac{dy}{dx} = x + 2xy = x(1 + 2y)$$

であるので，変数分離形である．

$$\int \frac{1}{1+2y}dy = \int xdx$$

から左辺は

$$\int \frac{1}{1+2y}dy = \frac{1}{2}\log|1+2y|,$$

右辺は

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C \quad （C \text{ は定数}）.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2}\log|1+2y| = \frac{x^2}{2} + C.$$

式変形により

$$1 + 2y = Ae^{x^2} \quad （A \text{ は定数}）.$$

を経て，一般解

$$y = \frac{Ae^{x^2} - 1}{2}.$$

を得る．

[4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{2x + y} = \frac{1 - 2(y/x)}{2 + (y/x)}$$

から $u = y/x$ とおくとき，$y' = u + xu'$ を得るから与式は

$$u + xu' = \frac{1 - 2u}{2 + u}$$

を経て，変数分離形

$$u' = \frac{1}{x}\frac{1 - 4u - u^2}{2 + u}$$

に帰着される．

$$\int \frac{2+u}{1-4u-u^2}du = \int \frac{1}{x}dx$$

から

$$-\frac{1}{2}\log|1-4u-u^2| = \log|x| + C \quad （C \text{ は定数}）.$$

式変形により

$$x^2(1-4u-u^2) = C'.$$

u を y に戻すと

$$x^2 - 4xy - y^2 = C'.$$

$x=1$ を代入すると $y(1)=1$ より $C'=-4$ を得る．特殊解は

$$x^2 - 4xy - y^2 = -4.$$

[5] (1)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v.$$

(2) 変数分離形だから

$$\int \frac{1}{mg-\gamma v}dv = \int \frac{1}{m}dt$$

として

$$-\frac{1}{\gamma}\log|mg-\gamma v| = \frac{t}{m} + C$$

を得る．式変形により

$$mg - \gamma v = Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$v(0)=0$ であるから $A=mg$ を得る．したがって

$$v = \frac{mg}{\gamma}\left(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right).$$

$t\to\infty$ のとき $v\to\frac{mg}{\gamma}$ だから速度が一定に向かうことが示された．