[1] $\mathbf{R}^3$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

について，ベクトル列 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次従属となるような $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ を一つ求めよ．さらにその $\mathbf{a}_3$ で，$\mathbf{a}_1$ を $\mathbf{a}_2$ と $\mathbf{a}_3$ の一次結合で表せ．

[2] $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して部分空間

$$V_\lambda = V(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix})$$

を考える．

(1) $\lambda = 2$ のとき次元 $\dim V_2$ を求めよ．

(2) $\dim V_\lambda = 2$ となる λ を求めよ．またそのときの V_λ の基底を求めよ．

[3]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) 線形写像 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ は一対一対応（単射）であるか否かを調べよ.

次に

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

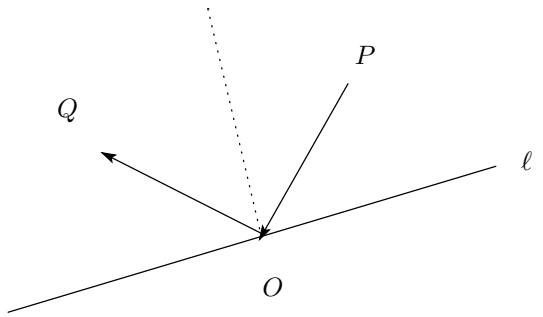
について連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える.

(2) 方程式が解を持つための $\mathbf{b}$ の条件を与えよ.

最後にもう一つの連立方程式を考える.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = b_1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & = b_2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = b_3 \end{cases}$$

(3) 2つの連立方程式が共に解を持つ，そのようなデータ $\mathbf{b}$ を次の中から（理由を述べた上で）選べ.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[4] 2次元平面上における直線 ℓ 上の点 O について次の問題を考える．平面上の勝手な点 P から O に光を当て ℓ に従って反射させ，O からの $\overline{PO}$ と等距離の点を Q とする（図参照）．O を $\mathbf{R}^2$ の原点, $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$, $f(\mathbf{x}) = \overrightarrow{OQ}$, $\ell : y = 2x$ としたとき，f の表現行列を求めよ（f が線形写像であることは既知として良い）.