[1] (1) $\int y^{-2}dy = \int \sin 2xdx$. $-y^{-1} = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. よって

$$y = \frac{1}{\frac{\cos 2x}{2} - C}.$$

(2) $\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int xdx$. ここで

$$\int \frac{dy}{y(1+y)} = \int (\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1})dy = \log|\frac{y}{y+1}|.$$

ゆえに

$$\frac{y}{y+1} = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

y について解くと

$$y = \frac{Ce^{\frac{x^2}{2}}}{1 - Ce^{\frac{x^2}{2}}}.$$

(3) $u = y/x$ とおくと与式は $y' = \frac{1-u}{1+2u}$. $y' = u + xu'$ であるので，

$$xu' = \frac{1-2u-2u^2}{1+2u}.$$

$$\int \frac{1+2u}{1-2u-2u^2}du = \int \frac{1}{x}dx.$$

$$-\frac{1}{2}\log|1-2u-2u^2| = \log|x| + C.$$

$\log|x^2(1-2u-2u^2)| = C$. ゆえに

$$x^2 - 2xy - 2y^2 = C.$$

(4) $y' - 2y = 0$ を解くと $y = Ce^{2x}$. C を $C(x)$ とおいて定数変化法を使う．$y' = C'e^{2x} + 2Ce^{2x}$. $y' - 2y = C'e^{2x} = xe^x$. $C' = xe^{-x}$. ゆえに $C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C$.

$$y = -(x+1)e^x + Ce^{2x}.$$

[2] 変数分離形であるから

$$\int \frac{dx}{b-ax} = \int dt = t + C.$$

$$-\frac{1}{a}\log|b-ax| = t + C.$$

$$\log|b-ax| = -a(t+C).$$

よって

$$b - ax = Ce^{-at}.$$

$$x = \frac{b}{a} - \frac{C}{a}e^{-at}.$$

$x(0) = 0$ から $C = b$ を得る．よって

$$x(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at}).$$

これより $t \to \infty$ のとき $x(t) \to \frac{b}{a}$ であることがわかる．なお，定数変化法を用いて特殊解を求めても同じ結果が得られる．