[1] 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

を基本変形すると標準形は単位行列になる．よって一次独立である．

[2] 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

を基本変形すると，列交換無しで rank 2 の標準形になる．よって

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix})$$

であり，$\dim V_1 = 2$.

[3] $\mathbf{a} \in V_1 \cap V_2$ とすると，適当な実数 x, y, u, v があって

$$\mathbf{a} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

つまり

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

をみたす．行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

を基本変形すると，列交換無しで rank 2 の標準形になる．このことから，u, v は独立したパラメータとして取れることを意味する（互いに依存しない）．よって $\dim(V_1 \cap V_2) = 2$ で，実際には V_1 と V_2 は同一の部分空間であるといえる．最後に次元定理から $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2$ を得る．

[4] (1) 単射である．

(2) 全射でない．