解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は零点とする．

[**1**] (1) $f(x) = \dfrac{x \sin^{-1} x}{\cos 4x}$ を微分せよ.

(2) $f(x) = x^{\cos(x^{-2})}$ $(x > 0)$ を微分せよ.

(3) $f(x) = x^2 e^{3x}$ の n 次導関数を求めよ.

[**2**] 関数

$$f(x) = \log|\sin x|, \qquad a = \frac{\pi}{3}$$

に 3 次のテイラーの定理を適用せよ.

[**3**] 逆関数の微分法に従って

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

を導け.

[**4**] 関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で連続で $f(0) > 0$ とする．さらに次の 2 条件をみたす：

(D.1) $f'(t) < 0 \quad (t \geqq 0)$
(D.2) $f''(t) \leqq 0 \quad (t \geqq 0)$

(1) $f(t_0) = 0$ となる $t_0 > 0$ が存在することを示せ.

(2) 条件 (D.2) を仮定しないとき，(1) と同じ結論が得られるか否かを理由を述べて記せ.

次の 2 問のうち **1 問を選択**して答えよ.

[**5a**] 関数 $f(x) = (x^2 - 2)e^x$ の極値をすべて求めよ.

[**5b**] $(1 + 2x)^{\frac{3}{2}} > 1 + 3x$ $(x > 0)$ を導け.

[**解答例**] [1] (1)

$$\frac{(\sin^{-1}x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\cos 4x+4x\sin^{-1}x\sin 4x}{\cos^2 4x}$$

(2)

$$x^{\cos(x^{-2})}\{2x^{-3}\sin(x^{-2})\log x+\frac{\cos(x^{-2})}{x}\}$$

(3) ライプニッツの公式を直接適用.

$$f^{(n)}(x)=3^n x^2 e^{3x}+2n3^{n-1}xe^{3x}+n(n-1)3^{n-2}e^{3x}$$

[2]

$$f(x)=\log\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2+\frac{\cos c}{3\sin^3 c}(x-\frac{\pi}{3})^3,$$

ただし，c は x と $\frac{\pi}{3}$ の間.

[3] $y=\tan^{-1}x$ ならば $x=\tan y$. ただし $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}.$$

[4] (1) f の 2 次のマクローリンの定理から

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{f''(c)}{2}t^2,$$

$0<c<t$. これから (D.2) を用いると

$$f(t)\le f(0)+f'(0)t.$$

さらに (D.1) から $f'(0)<0$ であるので

$$f(0)+f'(0)t\to-\infty,\quad t\to\infty.$$

はさみうちの原理から

$$f(t)\to-\infty,\quad t\to\infty.$$

つまり $f(t_1)<0$ なる $t_1>0$ が存在する．$f(0)>0$, f が連続であることから，中間値の定理を用いると $f(t_0)=0$ なる $0<t_0<t_1$ が存在する．

(2) 否．理由：反例を挙げる．

$$f(t)=\frac{1}{1+t}$$

は $f(0)>0$, (D.1) をみたすが，(D.2) をみたさない．そして，$t>0$ で t 軸と交わらない．

[5a] $f'(x)=(x^2+2x-2)e^x$ より $f'(x)=0$ を求めると $x^2+2x-2=0$. ゆえに $x=-1\pm\sqrt{3}$.

$f''(x)=(x^2+4x)e^x$. 代入すると

$$f''(-1+\sqrt{3})>0$$
$$f''(-1-\sqrt{3})<0$$

よって $f(-1+\sqrt{3})$ は極小値，$f(-1-\sqrt{3})$ は極大値（正しくは代入した値を求める）.

[5b] $f'(x)=3(1+2x)^{1/2}$. $f''(x)=3(1+2x)^{-1/2}$. $c>0$ に対して $f''(c)>0$ が成り立つので 2 次のマクローリンから $f(x)>1+3x$ が従う.