(注意) **解答は結果だけでなく，それに至る過程も記述せよ．結果のみの場合は零点になる．**

[**1**] 関数 $f(x) = [x]$ について以下の問に答えよ．ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数である．

(a) f の不連続点をすべて求めよ．

(b) 次の右極限値，左極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 3+0} f(x), \quad \lim_{x\to -5-0} f(x)$$

(c) 微分係数 $f'(1/2)$ を求めよ．

[**2**] 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (ネイピア数) は既知として，次の微分公式を定義から導け．

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

[**3**] 次の関数を微分せよ．

(1) $\log|\sin x|$

(2) $(3x+1)^{1/x}$

(3) $\tan^{-1}(\sqrt{x})$

[**4**] 関数 $e^{-x}\cos 3x$ の３階までの導関数をすべて求めよ．

[**5**] 関数 $f(x) = \cos x$ について以下の問に答えよ．

(a) f の５次のマクローリンの定理を書け．

(b) (a) の結果，剰余項を調べることによって次の不等式を導け．

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (0 < x < \pi)$$

K.U.

[解答例] [1] (a) $x = 0, \pm 1, \pm 2. \cdots$ (整数全体)

(b)

$$\lim_{x \to 3+0} f(x) = 3, \quad \lim_{x \to -5-0} f(x) = -6$$

(c) $f'(1/2) = 0$

[2] 差分 $\frac{\log(x+h) - \log x}{h}$ を考えて，対数法則により

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}.$$

$h/x = 1/k$ とおく．$h \to +0$ のとき，$k \to +\infty$. $h \to -0$ のとき，$k \to -\infty$. このとき仮定より

$$\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/x} = \frac{1}{x}\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} \longrightarrow \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}.$$

[3] (1) $1/\tan x$

(2) $(3x+1)^{1/x}\{\frac{-\log(3x+1)}{x^2} + \frac{3}{x(3x+1)}\}$

(3) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

[4] $f'(x) = -e^{-x}(\cos 3x + 3\sin 3x)$

$f''(x) = e^{-x}(-8\cos 3x + 6\sin 3x)$

$f'''(x) = e^{-x}(26\cos 3x + 18\sin 3x)$

[5] (a) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\sin c}{120}x^5$. ただし，$c$ は 0 と x の間.

(b) $0 < c < \pi$ であるから，$\sin c > 0$. よって剰余項は常に負．ゆえに与えられた不等式が成り立つ．

K.U.