

解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。結果のみの解答の場合、その問の得点は零点とする。特に1階線形方程式の一般解の公式に直接代入して求めた解答は零点とする。

1. $y_1 = \frac{e^{x^2} - 1}{2}$ は次の常微分方程式の解であることを示せ。

$$y' - x - 2xy = 0$$

2. 次の1階常微分方程式の特殊解を求めよ。

$$y' = x \cos 2x, \quad y(0) = 1$$

3. 次の1階方程式の一般解を求めよ。

(1)

$$y' - y = e^{-x}$$

(2)

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

(3)

$$y' = xy(1 - y)$$

4. 1階の方程式

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

の解 $y_1 = \frac{1}{x}$ を用いて、この方程式を1階線形方程式に帰着せよ。

[解答]

1. $y_1 = \frac{e^{x^2} - 1}{2}$ について,

$$y_1' = \frac{1}{2} 2x e^{x^2} = x e^{x^2}.$$

よって

$$y_1' - x - 2xy_1 = x e^{x^2} - x - 2x \frac{e^{x^2} - 1}{2} = 0.$$

y_1 は解である.

2. まず一般解を求めると

$$y = \int x \cos 2x dx + C = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

初期条件により,

$$y(0) = \frac{1}{4} + C = 1, \quad \therefore C = \frac{3}{4}.$$

特殊解

$$y = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{3}{4}$$

を得る.

3. (1) 1階線形方程式. 一般解は

$$y = C e^x - \frac{1}{2} e^{-x}.$$

(2) 同次形であるから, $z = \frac{y}{x}$ とおくと,

$$y' = z + xz'$$

代入すると, $xz' = z^2$. よって

$$\int \frac{1}{z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx + C.$$

$$\therefore z = -\frac{1}{C + \log|x|}.$$

$$\therefore y = -\frac{x}{C + \log|x|}.$$

別解として, 方程式は $n = 2$ のベルヌーイ型であるから $z = y^{-1}$ として z についての1階線形方程式に帰着できる.

(3) 変数分離形だから

$$\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int x dx + C$$

$$\therefore \int \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} dy = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\therefore \log|y| - \log|1-y| = \frac{x^2}{2} + C, \quad \therefore \log\left|\frac{y}{1-y}\right| = \frac{x^2}{2} + C.$$

よって

$$\frac{y}{1-y} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

y について解くと

$$y = 1 - \frac{1}{1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}}.$$

4. $y_1' = y_1^2 - \frac{2}{x^2}$ であるから, 辺辺引くと

$$(y - y_1)' = (y^2 - y_1^2) = (y - y_1)(y - y_1 + 2y_1)$$

$$\therefore (y - y_1)' - 2y_1(y - y_1) = (y - y_1)^2.$$

$z = y - y_1$ とおくと,

$$z' - 2y_1z = z^2.$$

これは $n = 2$ のベルヌーイ型であるから, 両辺に z^{-2} をかけると,

$$z^{-2}z' - 2y_1z^{-1} = 1.$$

$(z^{-1})' = -z^{-2}z'$ であることに注意して

$$-z^{-2}z' + 2y_1z^{-1} = -1$$

と変形をして, $w = z^{-1}$ とおくと,

$$w' + 2y_1w = -1, \quad \therefore w' + \frac{2}{x}w = -1.$$

これは 1 階線形である.

K.U.