

関数論中間試験問題 1999.12.14(火)

以下では i は虚数単位を表す。

[1] 複素数

$$z = \frac{\overline{(2-i)}}{(-1-i)(-1+2i)}$$

の絶対値と偏角の主値を求めよ。ただし、主値は $-\pi < \theta \leq \pi$ であるものとする。また \bar{z} は z の共役複素数を表す。

[2] $z = x + iy$ に対して、円

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

の一次変換 $w = \frac{1}{z}$ の像を求めよ。

[3] $0, -i, 1$ をそれぞれ $i, 1, 0$ に移す一次変換を求めよ。

[4]

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

は複素数平面全体で正則であることを示し、さらにその導関数 $(\sin z)'$ を求めよ。

[5] 次の方程式を満たす解をすべて求めよ。

(1) $z^4 = 1 - \sqrt{3}i, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi$

(2) $\cos z = i, \quad z = x + iy \quad (0 \leq x < 2\pi)$

(3) $e^z = -2i, \quad z = x + iy \quad (0 \leq y < 2\pi)$