

ベクトル解析 中間試験問題 1999.6.9

- [1] ベクトル  $A = (2, -3, 1)$ ,  $B = (1, 3, -1)$  について次の問に答えよ。
- (1) 外積  $A \times B$  の方向余弦を求めよ。ベクトルの方向余弦とはそのベクトルと同じ向きの長さ 1 のベクトルをいう。
  - (2)  $A \times B$  は  $A$  と直交していることを示せ。
- [2] スカラー場  $\varphi = \frac{x^3}{y^2} + x \cos z$  について次の問に答えよ。
- (1) 勾配  $\nabla\varphi$  の点  $(1, -1, \frac{\pi}{2})$  での値を求めよ。
  - (2) 点  $(1, -1, \frac{\pi}{2})$  におけるベクトル  $(-1, 0, 2)$  方向の  $\nabla\varphi$  の方向微分係数を求めよ。
- [3] 位置ベクトル  $r = (x, y, z)$  について次の問に答えよ。ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とする。
- (1) 発散  $\nabla \cdot (\frac{r}{r})$  を計算せよ。
  - (2) 回転  $\nabla \times r$  を計算せよ。
- [4]  $(x, y)$  平面上を走る自動車の時刻  $t$  での位置が位置ベクトル  $r(t) = (te^{-t}, \log t)$  で表されているとする。このとき、 $t = 1$  における速度ベクトル  $r'(1)$  と加速度ベクトル  $r''(1)$  を計算することで  $t = 1$  付近の  $r(t)$  のホドグラフ (軌道) の概図を描け。

微分公式

(i)  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  (積の公式)

(ii)  $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$  (商の公式)

(iii)  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$  ならば  $\frac{dz}{dx} = g'(y)f'(x)$  (合成関数の公式)