主固有値の爆発と人口動態

梅津健一郎（前橋工科大学）

2007-03-28

問題：$\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$, $N \geq 1$, を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域として，次のノイマン固有値問題を考える.

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\, g(x)\phi & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

- $\lambda > 0$.
- $g \in L^\infty(\Omega), \quad g > 0$ on a set of positive measure.
- $\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル場.

$$\int_\Omega g(x)\,dx < 0 \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1(g) := \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}{\int_\Omega g(x)v^2\,dx} : v \in W^{1,2}(\Omega), \int_\Omega g(x)v^2\,dx > 0\right\} > 0$$

講演の目的：主張

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_1(g_j)=\infty \tag{2}$$

のための $\{g_j\}$ の必要十分条件を求める.

背景：つぎのロジスティック境界値問題を考える.

$$\begin{cases} -\mu\Delta u = g(x)u - u^2 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

- $1/\lambda_1(g) \le \mu \Longrightarrow$ 正値解は存在しない.
- $0 < \mu < 1/\lambda_1(g) \Longrightarrow u_\mu > 0$ (正値解の一意存在)

$$\lim_{\mu\nearrow 1/\lambda_1(g)} u_\mu = 0, \qquad \lim_{\mu\searrow 0} u_\mu = g^+$$

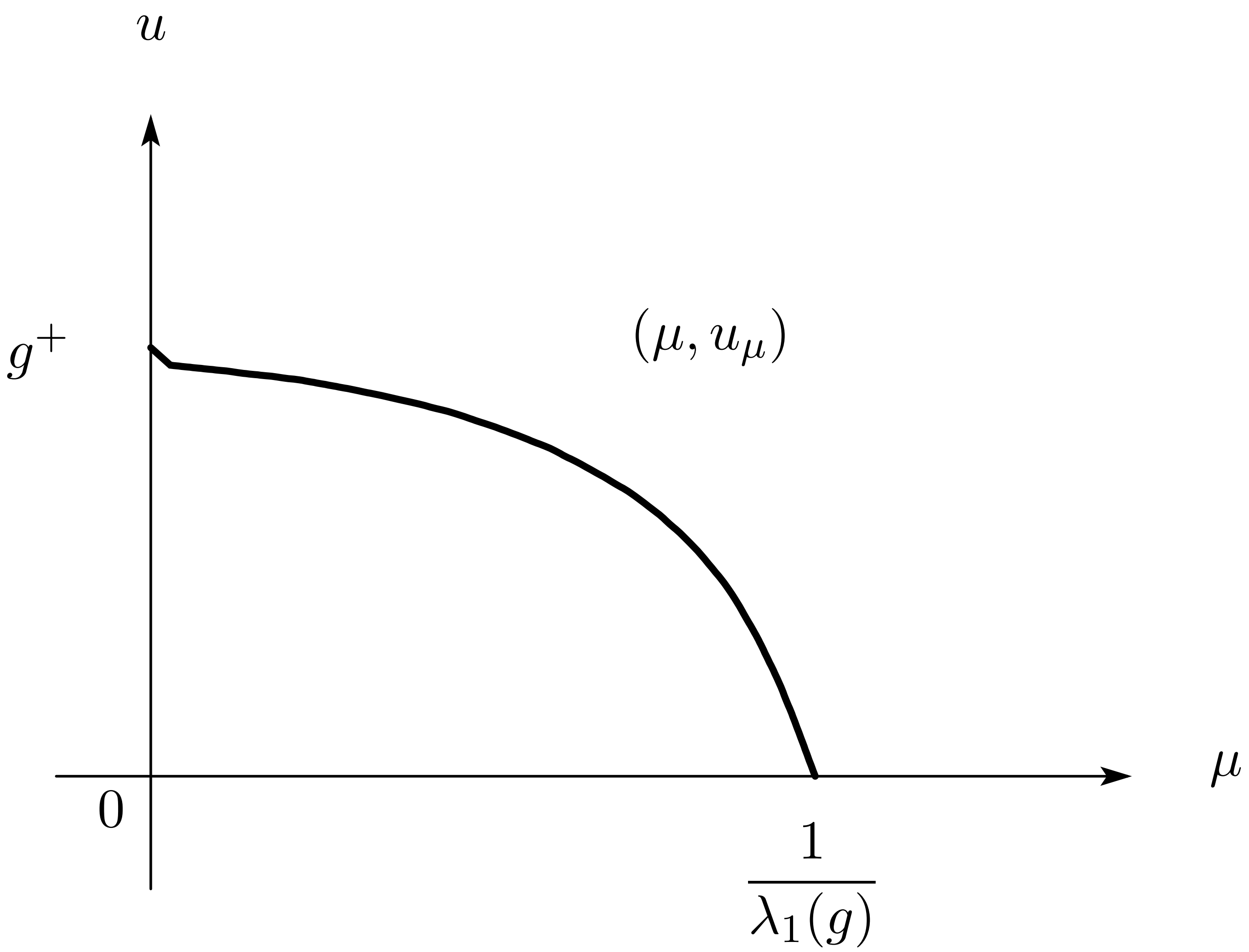


Figure 1

Cantrell-Cosner の結果：$\phi|_{\partial\Omega} = 0$ のもとで，

$$\|g_j\|_\infty \le C$$

を仮定する．このとき，$\boxed{\lim_{j\to\infty} \lambda_1(g_j) = \infty}$ であるための必要十分条件は

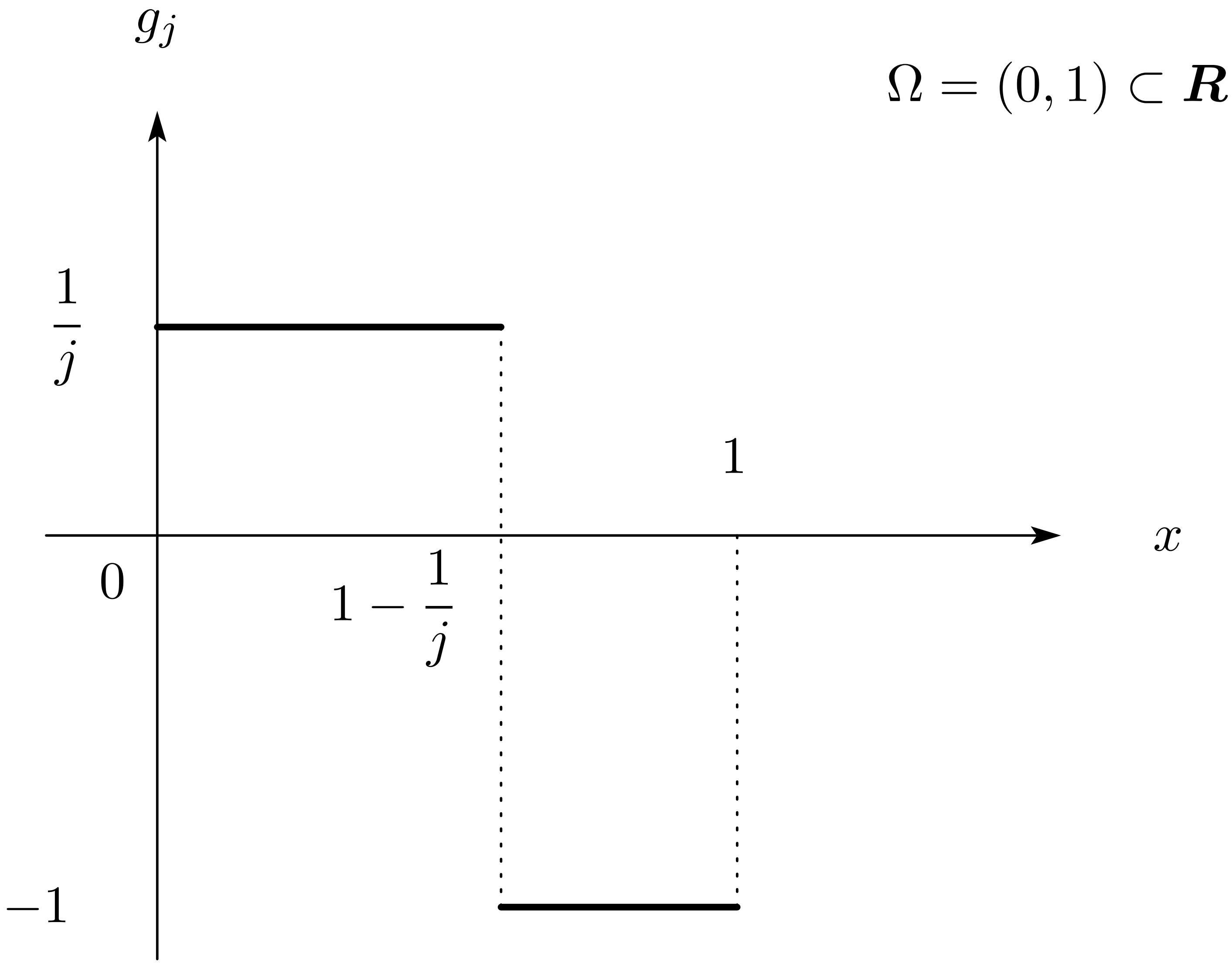
$$\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega g_j(x)\psi\, dx \le 0, \quad \forall\psi \in L^1(\Omega) \ \text{ s.t. } \ \psi \ge 0. \tag{3}$$

条件 (3) は次の例を含む.

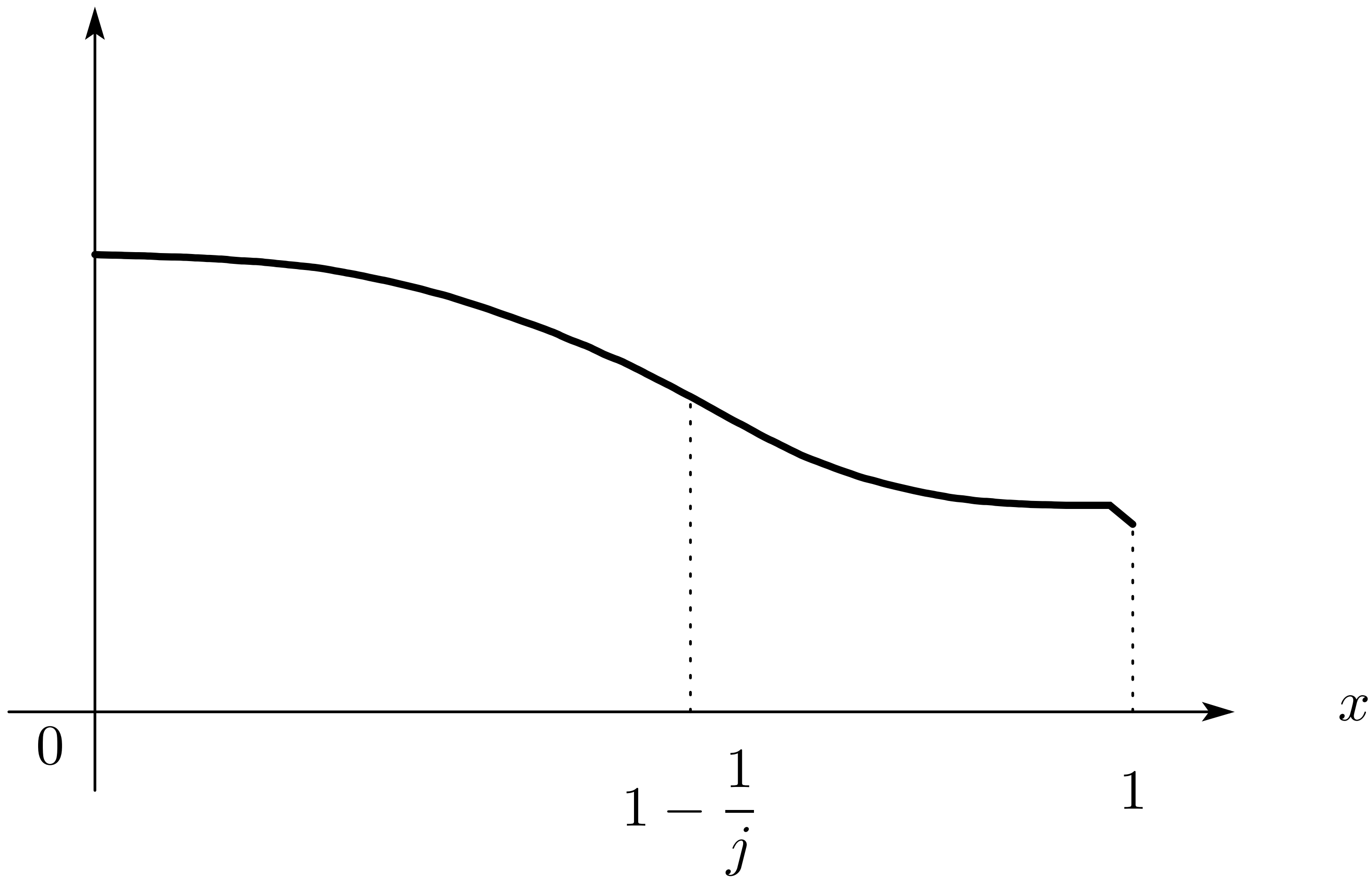
(a) $(g_j)^+ \longrightarrow 0 \quad$ a.e. in Ω.

(b) $\Omega = (0,\pi) \subset \boldsymbol{R}^1, \quad g_j(x) = \sin jx.$

ノイマン条件における主張 (3) に対する反例：



ϕ_j ($\lambda_1(g_j)$ の固有関数)



$0 < k < 1$ に対して,

$$v_j(x) = -\frac{x}{j} + k\,, \qquad x \in (0,\ 1)$$

とおくとき,

$$\int_0^1 (v_j')^2\,dx = \frac{1}{j^2},$$

$$\int_0^1 g_j(v_j)^2\,dx = \frac{k(1-k)}{j^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{j^2}\right) \quad (j \to \infty). \tag{4}$$

$$\therefore\quad \lambda_1(g_j) \leq \frac{\int_0^1 (v_j')^2\,dx}{\int_0^1 g_j(v_j)^2\,dx} = \frac{1}{k(1-k)+\mathrm{o}(1)} \qquad (j \to \infty).$$

ノイマン条件のもとでの十分条件に関する考察：

Cantrell-Cosner の条件 (3) はノイマン条件のもとでは十分ではない.

$$\int_\Omega g_j\,dx < 0 \implies \limsup_{j\to\infty} \int_\Omega g_j\,dx \le 0$$

- $\displaystyle\limsup_{j\to\infty} \int_\Omega g_j\,dx < 0 \implies$ 条件 (3) は十分.
- $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_\Omega g_j\,dx = 0 \implies$ 反例を含む．付加条件が必要！

定理１：問題 (1) について，$\int_\Omega g_j\,dx < 0, \quad \|g_j\|_\infty \le C,$

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega g_j\,dx = 0,$$

$$\limsup_{j\to\infty}\int_\Omega g_j(x)\psi\,dx \le 0, \quad \forall\psi\in L^1(\Omega)\ \text{ s.t. }\ \psi\ge 0,\ \psi\not\equiv \mathrm{Const},$$

のもとで，主張 $\boxed{\lim_{j\to\infty}\lambda_1(g_j)=\infty}$ を得るには，以下の条件をみたすことが十分である．

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\|g_j\|_{q'}^2}{\left|\int_\Omega g_j\,dx\right|} = 0, \quad q' = \begin{cases} \dfrac{2N}{N+2}\,, & N\ge 3, \\ 1\,, & N=1,2. \end{cases} \tag{5}$$

cf. $\quad q' = 2$ [Saut-Sheurer '78]

$N = 1$ **のときの付加条件 (5) の考察**：$\Omega = (0, 1) \subset \boldsymbol{R}$ のとき，
定理 1 の仮定と

$$\int_\Omega g_j^+ \, dx \longrightarrow 0$$

のもとで，$\exists c > 0,\ 0 < \exists \sigma < 1 \quad \text{s.t.}$

$$\frac{\int_\Omega g_j^- \, dx}{\int_\Omega g_j^+ \, dx} \geq 1 + c \left(\int_\Omega g_j^+ \, dx \right)^\sigma, \quad \forall j \gg 1 \tag{6}$$

が成立するとき，$\boxed{\lim_{j \to \infty} \lambda_1(g_j) = \infty}$ である．

実際,

$$\text{条件 (6)} \implies \lim_{j \to \infty} \frac{\|g_j\|_1^2}{\left| \int_\Omega g_j \, dx \right|} = 0, \qquad \because\ q' = 1$$

逆に，$\Omega = (0,1)$ において

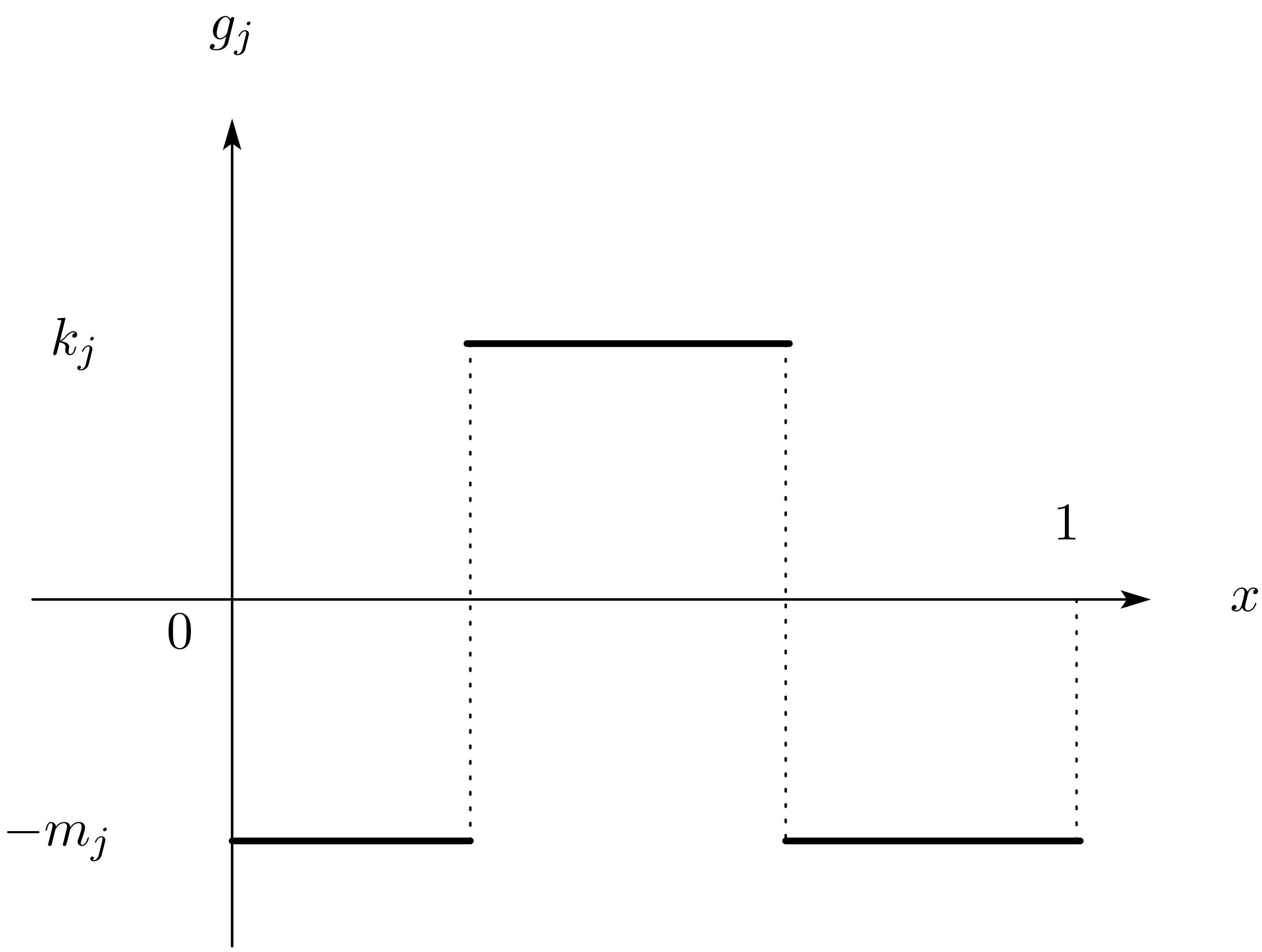
$$g_j(x) = k_j\,\chi_{(a_j,\,a_j+T_j)}(x) + (-m_j)\,\chi_{\Omega\setminus(a_j,\,a_j+T_j)}(x), \tag{7}$$

$$k_j, m_j > 0; \quad 0 \le a_j < a_j + T_j \le 1$$

を考えるとき，

$$\begin{aligned} &\int_\Omega g_j^+\,dx \longrightarrow 0 \\ &\frac{\int_\Omega g_j^-\,dx}{\int_\Omega g_j^+\,dx} \le 1 + c\int_\Omega g_j^+\,dx, \quad \forall j \gg 1 \end{aligned} \tag{8}$$

ならば $\boxed{\lambda_1(g_j)\text{ は上に有界}}$ である.


g_j
k_j
1
x
0
$-m_j$