

以下, n, N は自然数を表す.

1. 次の各問に答えよ.

- (a) $\cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right)$ を求めよ.
- (b) $y = \frac{2-5x}{4x+3}$ のグラフをかけ.
- (c) $y = -1 + \sin(\pi - 2x)$ のグラフをかけ.
- (d) 微分公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n \geq 1$) を微分の積公式と数学的帰納法により導け.

2. $a > 1$ とする. 二項定理を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = 0$ を導け.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ を $\varepsilon - N$ 法「 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $\forall n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$ 」で定義する.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n+2} = 1$ を検証する. $a_n = \frac{n+4}{n+2}$ とおく. $\varepsilon = \frac{1}{10^3}$ としたとき, N を一つ具体的に与えよ.
- (b) $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) のとき, $a_n + (-1)^n b_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) を $\varepsilon - N$ 法により示せ.

4. 上限下限について以下の問に答えよ.

- (a) 集合 $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\}$ の下限が 0 であることを定義に従って説明せよ.
- (b) $B = \{\tan^{-1} n : n \geq 1\}$ の上限と下限を求めよ. ただし, $\tan^{-1} x$ は逆三角関数.

5. 有界な数列 a_n を考える.

- (a) $A_N = \sup_{n \geq N} a_n$ で与えられる数列 A_N ($N \geq 1$) は収束することを示せ.
- (b) (a) により, 上極限 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} A_N$ を定義するとき, $a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ について A_N と $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

6. 次の各問に答えよ.

- (a) $0 < \exists c < 1$ s.t. $|a_{n+1} - a_n| \leq c |a_n - a_{n-1}|$ ($n \geq 2$) をみたすとき, a_n はコーシー列であることを示せ.
- (b) $a_1 > 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ をみたす数列 a_n は収束することを (a) を利用して示せ. また, その極限值を求めよ.