以下，n は自然数を表す．

1. 次の問に答えよ．

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ の収束を，コーシーまたはダランベールの判定法を用いて判定せよ．

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ について論じよ．

2. M は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である．点列 $\mathbf{x}_j \in M$ が $\mathbf{x}_j \to \mathbf{x}_0$ $(j \to \infty)$ ならば $\mathbf{x}_0 \in M$ であることを背理法を用いて示せ．

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ を考える．f が $(0,0)$ において全微分可能であるかを判定せよ．もし可能ならば $(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ．必要ならば次の不等式を用いよ．$(x,y) \neq (0,0)$ のとき $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$，$\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$.

4. $(x_0, y_0) = (1, -2)$ とする．(x_0, y_0) において $f(x,y) = x^3 - xy^2 + 2xy + 1$ の方向微分係数が最大となる方向を $\mathbf{u}$ とする．このとき，(x_0, y_0) において $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - x$ の $\mathbf{u}$ 方向の方向微分係数を求めよ．

5. C^3 級な $f(x,y)$ に対して $z = f(1-2t, -7+3t)$ とおく．3 次導関数 $z'''(t)$ を求めよ．

K.U.