解答は結果だけでなく，それに至る過程も記述すること．

1. 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

は $(0,0)$ において連続であるか否か判定せよ．

2. 関数 $f(x,y)=x^2-2y^2+3xy-4x+y-1$ について考える．

   (a) f は $(0,0)$ において C^1 級であることを示せ．

   (b) (a) の結果から，f が $(0,0)$ で全微分可能であることは直ちに成り立つ[1]．一方で，定義[2]から直接 f が $(0,0)$ で全微分可能であることを導け．必要があれば，不等式 $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq 1$, $\dfrac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq 1$ を用いよ．

3. 関数 $f(x,y)=y\log(x-2y)$，点 $(x_0,y_0)=(3,1)$ についてつぎの問に答えよ．

   (a) f の定義域と値域を求めよ．

   (b) 偏導関数 f_x，f_y を求めよ．

   (c) (x_0,y_0) における接平面の方程式を求めよ．

   (d) (x_0,y_0) において，ベクトル $(3,-2)$ で決まる方向 $\mathbf{u}$ の方向微分係数を求めよ．

   (e) 2 次偏導関数 f_{yx} を求めよ．

---

[1]「C^1 級 $\Longrightarrow$ 全微分可能」より

[2] f が (x_0,y_0) で全微分可能であるとは，

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h+f_y(x_0,y_0)k+\mathrm{o}(\sqrt{h^2+k^2}),\quad (h,k)\to(0,0)$$

のときをいう．$\mathrm{o}(\cdot)$ は small order.

K.U.

[解答例] 1. 連続ではない.

$y=x>0$ をみたして，(x,y) を $(0,0)$ に近づけると，

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

より，f は $\frac{1}{2}$ に近づく．一方，$y=0,\, x>0$ をみたして，(x,y) を $(0,0)$ に近づけると，

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{x^2}=0$$

より，f は 0 に近づく．$(0,0)$ に近づく 2 通りの近づけ方で異なる値に f は近づくので連続ではない.

2. (a) $(0,0)$ で C^1 級とは，連続関数 f の偏導関数 $f_x(x,y),\, f_y(x,y)$ が $(0,0)$ で連続のときをいう.

$$f_x(x,y)=2x+3y-4, \quad f_y(x,y)=-4y+3x+1$$

から，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=-4=f_x(0,0), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=1=f_y(0,0)$$

であるので，f は $(0,0)$ で C^1 級である.

(b) 定義より，

$$f(h,k)=-1-4h+k+\mathrm{o}(\sqrt{h^2+k^2}), \quad (h,k)\to(0,0)$$

を示せばよい．すなわち，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2-2k^2+3hk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

を示せばよい．それぞれ，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\le |h|\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le |h| \to 0, \quad (h,k)\to(0,0),\\
\left|\frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\le |k| \to 0, \quad (h,k)\to(0,0),\\
\left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &\le |h| \to 0, \quad (h,k)\to(0,0).
\end{aligned}$$

よって $(0,0)$ で全微分可能であることが示せた.

3. (a) 定義域は $x > 2y$ が与える領域．値域については，特に $y = 1$ とおく．このとき，x は $x > 2$ を動く．$f(x, 1) = \log(x - 2)$ はこのとき対数関数の値域全体 $\mathbf{R}$ を動く．$\mathbf{R}$ より広い領域は無いので，求める値域は $\mathbf{R}$ である．

(b) $f_x(x, y) = \frac{y}{x-2y}$, $f_y(x, y) = \log(x - 2y) - \frac{2y}{x-2y}$.

(c) $f(3.1) = 0$, $f_x(3, 1) = 1$, $f_y(3, 1) = -2$ より，求める接平面の方程式は

$$S(x, y) = 0 + (x - 3) - 2(y - 1) = x - 2y - 1.$$

(d) ベクトル $(3, -2)$ 方向の長さ 1 のベクトルは $(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}})$. よって定義より

$$f'_{\mathbf{u}}(3, 1) = f_x(3, 1)\frac{3}{\sqrt{13}} + f_y(3, 1)\frac{-2}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

(e) 定義より

$$f_{yx}(x, y) = (f_y(x, y))_x = \frac{x}{(x - 2y)^2}.$$

K.U.