

以下において, $\varepsilon - \delta$ 法を用いて論ぜよ, という指示がない場合はこれに触れる必要はない.

1. つぎの関数の一様連続性を $\varepsilon - \delta$ 法に基づいて判定せよ.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 1)$$

2. 実数 $a \in \mathbf{R}$ は $a > 1$ をみたま. 有理数 $q \in \mathbf{Q}$ に対する a^q の性質は既知とする. つぎの問に答えよ.

(a) 無理数 r に対して a^r を定義せよ.

(b) $r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ について, 単調性「 $r_1 < r_2$ ならば $a^{r_1} < a^{r_2}$ 」を導け.

3. 5 次方程式 $x^5 - 6x^3 + x^2 - x + 4 = 0$ は区間 $(2, 3)$ に解をもつことを示せ.

4. 実数 x に対して, $[x]$ を x を超えない最大の整数と定義する. 例えば,

$$\left[\frac{3}{4} \right] = 0, \quad [-6.6] = -7, \quad [4] = 4.$$

(a) 左極限值 $\lim_{x \rightarrow 100-0} [x]$ が存在するならば求めよ.

(b) 関数 $f(x) = [x]$ は $x = 5$ で連続であるか否かを, 連続性の定義に基づいて判定せよ.

5. 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ が存在するならば求めよ.