A super and subsolution method for sublinear problems with low regularity coefficients

2008-09-25

梅 津 健一郎（茨城大教育）

滑らかな有界領域　$\Omega \subset \mathbb{R}^N,(N \geq 2)$ において，つぎの劣線形境界値問題の正値解の存在を考える．

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \, (\, g(x) - u^{p-1} \,) \, u & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \lambda \, h(x) \, u & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

- g, h　は　「$g \leq 0$　かつ　$h \leq 0$」　ではない
- $\lambda > 0$　は parameter
- $p > 1$　は任意の定数

既存の結果と目的

- Amann (1976) $\Longrightarrow$ $g,\ h$ が Hölder クラスに属するときの super-subsolution argument [Theorem 9.4]

- $g,\ h$ が Sobolev クラスに属するときの考察：

$$\begin{cases} g \in L^{\infty}(\Omega), \\ h \in W^{1-(1/r),\, r}(\partial\Omega), \quad \forall r > 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 正値解 $u \in W^{2,\, q}(\Omega),\quad q > N$ の存在 ?

- Brezis-Oswald (1986) $\Longrightarrow$ $u|_{\partial\Omega} = 0$

- 適当な reduction により，Hölder 空間の枠組みにおけるsuper and subsolution の議論に帰着させ，解の存在を得る（**目的**）.

$\Longleftarrow$ 線形化固有値問題の正値固有関数の滑らかさ

線形化固有値問題の主固有値

U. (2006)　(cf.　Afrouzi-Brown (1999))

仮定のSobolev クラスに属する　$\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$　に対して,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi \;=\; \lambda\, g(x)\,\varphi \;+\; \mu(\lambda)\,\varphi & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} \;=\; \lambda\, h(x)\,\varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

- 主固有値　$\mu_1 \;=\; \mu_1(\lambda)$　の一意存在

- μ_1　の符号　　$\exists\, \lambda_1 \;=\; \lambda_1(g,h) \geq 0$　s.t.

$$\begin{cases} \qquad \mu_1(\lambda_1) = 0 \\ \lambda > \lambda_1 \qquad \Longrightarrow \quad \mu_1(\lambda) \;<\; 0 \\ 0 < \lambda < \lambda_1 \quad \Longrightarrow \quad \mu_1(\lambda) \;>\; 0 \end{cases}$$

- μ_1　の正値固有関数

$$\begin{cases} \varphi_1 \in W^{2,\,q}\,(\Omega), \quad \forall q > N \quad (\,\subset C^{1+\theta}(\overline{\Omega})\,) \\ \varphi_1 > 0 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \end{cases}$$

適当なreduction

- 変換 $u = v\ \varphi_1$ (u は original problem の解)

$$\Longrightarrow \quad v\ ?$$

$$\begin{cases} -\Delta v - \dfrac{2\nabla\varphi_1 \cdot \nabla v}{\varphi_1} = -\mu_1(\lambda) v - \lambda {\varphi_1}^{p-1} v^p & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \qquad \text{with} & \\ \varphi_1 \in C^{1+\theta}(\overline{\Omega}) \qquad (0 < \forall\theta < 1) & \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Amann [Theorem 9.4] を適用可能

- $v \equiv K$ (定数) は十分大きいとき supersolution

- $K > \psi$ subsolution の存在 ?

補助問題の線形化固有値問題とsubsolutionの構成

$$\begin{cases} -\Delta w - \dfrac{2\nabla\varphi_1 \cdot \nabla w}{\varphi_1} = -\mu_1(\lambda) w + \ \gamma(\lambda)\ w & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

- 主固有値 $\gamma_1(\lambda)$ は

$$\gamma_1(\lambda) \ = \ \mu_1(\lambda) \ - \ \int_\Omega \frac{{\varphi_1}^2}{{w_1}^2} \ |\nabla w_1|^2 dx$$

で与えられる．ここで，w_1 は $\gamma_1(\lambda)$ の正値固有関数

($w_1 > 0$ in $\overline{\Omega}$)

- 特に，$\lambda > \lambda_1$ ならば $\gamma_1(\lambda) < 0$

$\Longrightarrow$ $\psi = \varepsilon w_1$

は十分小さい $\varepsilon > 0$ について subsolution

$\Longrightarrow$ 補助問題の正値解

$\exists\ v \in C^2(\overline{\Omega})$ s.t. $\varepsilon w_1 \le v \le K$ in $\overline{\Omega}$

$\Longrightarrow$ original な問題の正値解 $u = v\ \varphi_1$

主結果

条件

$$g > 0 \quad \text{on a set of positive measure, } \underline{\text{or}}$$

$$h(x_0) > 0 \quad \text{for some} \quad x_0 \in \partial\Omega$$

のもとで， $\boldsymbol{\lambda > \lambda_1}$ ならばただ一つ正値解をもち，

$\boldsymbol{\lambda \leq \lambda_1}$ ならば $\boldsymbol{u \in W^{2,\,q}(\Omega)}$， $\boldsymbol{q > N}$ をみたす正値解をもたない．

証明の概略

- Picone identity

$$\int_\Omega \left(\frac{\varphi_1}{w_1}\right) \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left({w_1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\varphi_1}{w_1}\right)\right) dx$$
$$= -\int_\Omega {w_1}^2 \left|\nabla\left(\frac{\varphi_1}{w_1}\right)\right|^2 dx - \lambda \int_{\partial\Omega} h\ {\varphi_1}^2\, ds$$

- direct computation

$$\left(\frac{\varphi_1}{w_1}\right) \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left({w_1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\varphi_1}{w_1}\right)\right)$$
$$= -\lambda\, g\, {\varphi_1}^2 - 2\mu_1\, {\varphi_1}^2 + 2\,\frac{\varphi_1}{w_1}\,\nabla\varphi_1 \nabla w_1 + \gamma_1\, {\varphi_1}^2.$$

- characterization of μ_1 $\left(\int_\Omega {\varphi_1}^2 dx = 1\right)$

$$\mu_1 = \int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 dx + \lambda\left(\int_\Omega g{\varphi_1}^2 dx + \int_{\partial\Omega} h{\varphi_1}^2 ds\right)$$