1. 閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 f が定積分可能であるということを説明せよ．ただし，少なくとも次の語句を定義して含めること．

分割，分割の幅，リーマン和

次の**５題から４題を選択**して答えよ．

2. f は $[a,b]$ 上連続な関数とする． $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt,\ a < x < b$ で F を定めるとき，F は f の原始関数であることを示せ．

3. 定積分 $\displaystyle\int_e^{e^2} x(\log x)^2 dx$ を求めよ．

4. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$ を求めよ．不定積分の任意定数 C は省略してかまわない．

5. 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$ を求めよ．

6. 曲線 $C : x = r(t)\cos t,\ y = r(t)\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ r(t) = 1 + \sin t$ を考える．

   (a) C の概形を描け．

   (b) C の長さを求めよ．

K.U.

[略解]

1.

(a) f の単調性から $\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) = f(x_k)$, $\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x) = f(x_{k-1})$. よって

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$
$$s_\Delta = \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

(b) $S_\Delta - s_\Delta = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$ より，$d(\Delta) = \max_{1\le k\le m}(x_k - x_{k-1})$ とおくと，$f(x_k) - f(x_{k-1}) \ge 0$ だから

$$\begin{aligned} S_\Delta - s_\Delta &\le d(\Delta)\sum_{k=1}^{m}(f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &\le d(\Delta)(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_m) - f(x_{m-1})) \\ &= d(\Delta)(f(x_m) - f(x_0)) \\ &= d(\Delta)(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

$d(\Delta) \to 0$ のとき，$S_\Delta - s_\Delta \to 0$ だから f は $[a, b]$ 上定積分可能である．