(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい. 解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

1. (1) 中間値の定理をかけ.
   (2) 4次方程式 $x^4 + x^3 - 2x^2 - 6 = 0$ は少なくとも2つ実数解をもつことを示せ.

2. (1) n 次導関数 $(\log(1+2x))^{(n)}$ の形を予想して，数学的帰納法で証明せよ.
   (2) n 次導関数 $(x^2 \log(1+2x))^{(n)}$ を求めよ.

3. (1) $\sin x$ の2次のマクローリンの定理をかけ.
   (2) (1) を用いて $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ を求めよ.
   (3) $x > 0$ のとき，x と $\sin x$ の大小関係を判定せよ.

4. $y = x^3 e^{-x}$ の増減，凸性，及び $x \to \pm\infty$ における挙動を調べて，グラフの概形をかけ.

平均値の定理に関する次の問題のうち，どちらか１問選択して答えよ.

5. $f(x) = \arctan x$ は $x > 0$ において一様連続であることを示せ.

6. $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能な $f(x)$ が，$f'(x) > 0$ $(\forall x \in (a, b))$ であるとする. このとき，$f(x)$ は $[a, b]$ において単調増加な関数であることを示せ.

解答は次ページ

[解答]

1. (1) 閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ が $f(a)f(b)<0$ をみたすとき，$a<\exists c<b$ s.t. $f(c)=0$ が成り立つ．
(2) $f(x)=x^4+x^3-2x^2-6$ と定めると，$\mathbf{R}$ の連続関数である．$f(0)=-6<0$, $f(2)=10>0$ だから，中間値の定理より，$0<\exists c<2$ s.t. $f(c)=0$ を得る．また，$f(-3)=30>0$ だから，中間値の定理より $-3<\exists d<0$ s.t. $f(d)=0$ を得る．c,d が求める 2 つの実数解．

2. (1) $n=1,2,3$ を見ると $(\log(1+2x))^{(n)}=(-1)^{n-1}2^n(n-1)!(1+2x)^{-n}$ と予想できる．
(2) $f(x)=x^2$, $g(x)=\log(1+2x)$ とおく．ライプニッツの公式から

$$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}{}_nC_j f^{(j)}(x)g^{(n-j)}(x).$$

$f'(x)=2x$, $f''(x)=2$, $f^{(j)}(x)=0$ $(j\geq 3)$ だから，

$$(x^2\log(1+2x))^{(n)}={}_nC_0x^2g^{(n)}(x)+{}_nC_1 2xg^{(n-1)}(x)+{}_nC_2 2g^{(n-2)}(x).$$

(1) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}&(x^2\log(1+2x))^{(n)}\\&=x^2(-1)^{n-1}2^n(n-1)!(1+2x)^{-n}\\&\quad+n2x(-1)^{n-2}2^{n-1}(n-2)!(1+2x)^{-n+1}\\&\quad+n(n-1)(-1)^{n-3}2^{n-2}(n-3)!(1+2x)^{-n+2}\end{aligned}$$

3. (1) $\sin x=x-\frac{\sin c}{2}x^2$ をみたす c が 0 と x の間に存在する．
(2) $x\neq 0$ のとき，(1) の式の両辺を x で割って，

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{\sin c}{2}x.$$

$x\to 0$ のとき $\sin c\to 0$ だから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を得る．
(3) $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ のとき，(1) において c は $0<c<\frac{\pi}{2}$. よって $\sin c>0$. したがって

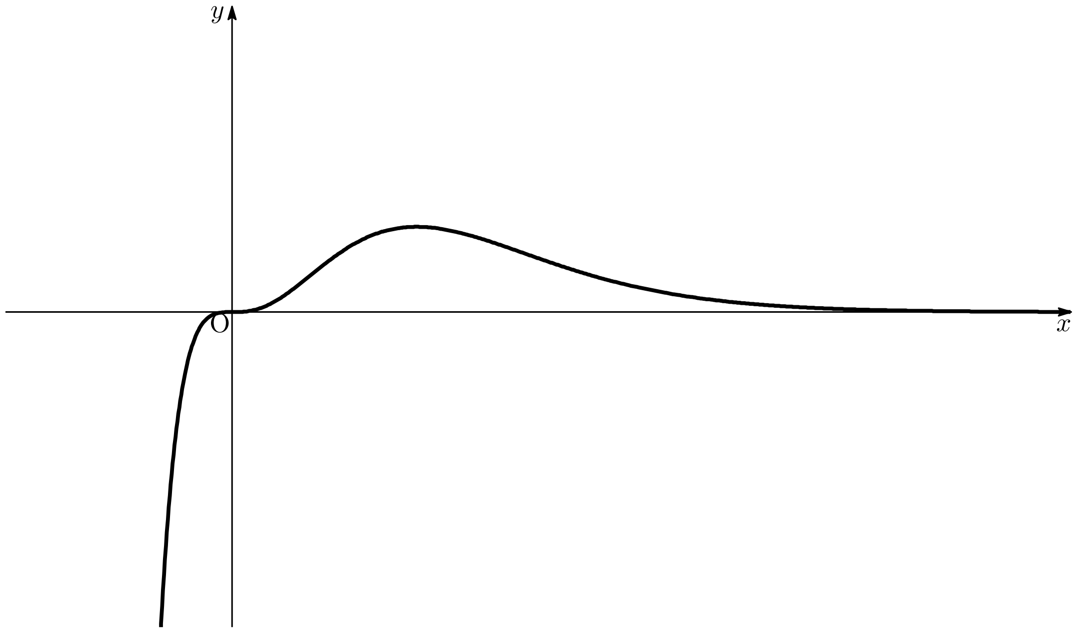
$$\sin x=x-\frac{\sin c}{2}x^2<x.$$

$x>\frac{\pi}{2}$ のときは,

$$x>\frac{\pi}{2}>1\geq\sin x$$

であるので，$\sin x<x$. 以上から $\forall x>0$ について $\sin x<x$.
（別解） $f(x)=x-\sin x$ とおいて，$x>0$ で $f(x)$ が単調増加であることを示す．

4. グラフは下図のとおり．



5. $x, a > 0$, 平均値の定理から

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

をみたす c が a と x の間に存在する．今，$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ であるから

$$0 < f'(c) = \frac{1}{1+c^2} < 1.$$

よって，

$$|f(x) - f(a)| = f'(c)|x - a| < |x - a|.$$

これより一様連続であることが導ける．

6. $\forall x_1, x_2\ (a \leq x_1 < x_2 \leq b)$, $[x_1, x_2]$ に平均値の定理を適用すると，$x_1 < \exists c < x_2$ s.t.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

仮定より $f'(c) > 0$. ゆえに $f(x_2) - f(x_1)$ と $x_2 - x_1$ は同符号である．よって $x_2 - x_1 > 0$ から $f(x_2) - f(x_1) > 0$ が従う．

K.U.