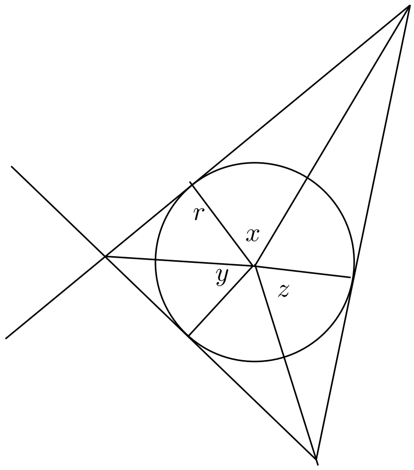
(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

1. $f(x,y)=3x^2+2xy+6y^2-2x+y-1$ の極値点，鞍点があればそれを求めよ．

2. 半径 r の定円に外接する三角形のうち面積が最小のものは正三角形であることを極値問題を解いて示したい．



(1) 円の中心と接点を結ぶ線分と，三角形の頂点を結ぶ線分でなす角をそれぞれ x,y,z とする．三角形の面積を S とするとき，S を x,y で表せ．また，x,y の動く範囲を求めよ．
(2) 題意を示せ．

3. 曲線 $x^3+2xy-y^2=1$ 上の点 $(1,2)$ の近傍における曲線の形状を知りたい．
(1) どのような結果（定理）を用いれば良いか？その結果の内容をかけ．
(2) (1) の結果に従って曲線の形状を調べて，曲線の概形をかけ．

4. $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y-xy}$ の $(0,0)$ におけるグラフの形状を調べたい．
(1) $(0,0)$ における 2 次近似多項式を求めよ．
(2) 接平面を基準としてグラフの形状を説明せよ．

5. 条件 $\varphi(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ の極値を考える．
(1) (x_0,y_0) が極値点であるとき，みたすべき条件を導け．
(2) $\varphi(x,y)=4x^2+y^2-4$ のとき，$f(x,y)=x+2y$ の極値を求めよ．

$\boxed{\text{解答は次ページ}}$

[解答]

1. 極小点 $(\frac{13}{34}, \frac{-5}{34})$

2. (1) $S = r^2(\tan x + \tan y - \tan(x+y))$. x, y の範囲は $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ かつ $\frac{\pi}{2} < x + y < \pi$. 2つ目の条件は $0 < z = \pi - x - y < \frac{\pi}{2}$ より.

(2) 停留点を求めると，まず $x = y$ が条件として得られ，次に $\cos^2 x = \cos^2 2x$ を得る．$0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < 2x = x + y < \pi$ から $\cos x > 0$, $\cos 2x < 0$ である．よって，$\cos x = -\cos 2x$. 加法定理を用いて解くと $\cos x = \frac{1}{2}$. $x = y = \frac{\pi}{3}$, $z = \pi - x - y = \frac{\pi}{3}$. あとは $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ が S の極小点であることを示せばよい.

3. (1) 陰関数定理を用いる．$F(x, y) = 0$ をみたす点 (x_0, y_0) が $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ならば，(x_0, y_0) のある近傍が存在して，その近傍において $F(x, y) = 0$ の集合は (x_0, y_0) を通るグラフ $y = f(x)$ で与えられる.

(2) $F(x, y) = x^3 + 2xy - y^2 - 1$ とおくと $F(1, 2) = 0$ をみたし，$F_y(1, 2) \neq 0$ をみたす．陰関数定理より $(1, 2)$ の近傍で $y = f(x)$ かつ $2 = f(1)$ なる f が存在して，$x^3 + 2xy - y^2 = 1$ を与える. $f'(1) > 0$, $f''(1) < 0$ だから f は上に凸な単調増加関数である.

4. (1) $1 + x + y + x^2 + 3xy + y^2$

(2) 接平面 $1 + x + y$ を基準として $(0, 0)$ は鞍点様な点である．したがって，接平面の上と下にグラフが現れる.

5. (1) (x_0, y_0) が極値点であるとき，等高線 $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ と $\varphi(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) で接する．よって，勾配ベクトルが等高線に垂直に現れるという事実から，(x_0, y_0) において f と φ の勾配ベクトルは一次従属の関係になる．つまり，$\exists \lambda \in \mathbf{R}$ s.t.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla \varphi(x_0, y_0).$$

これと $\varphi(x_0, y_0) = 0$ が求める条件である.

(2) $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}})$ のとき極大値 $\sqrt{17}$. $(x, y) = (\frac{-1}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}})$ のとき極小値 $-\sqrt{17}$.

K.U.