

N は自然数全体を表す .

1 数列の収束の判定法に、はさみうちの方法がある： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ のとき、
「 $\exists N \in N$ s.t. $\forall n \geq N \implies a_n \leq b_n \leq c_n$ 」を b_n がみたしていれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.
これを $\varepsilon - N$ 法により示せ .

2 数列 a_n が $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|, n \in N$ をみたしているとき、 a_n はコーシー列であることを示せ .

3 $a > 1$ とする . $x \rightarrow \infty$ のとき、指数関数 a^x はどの $x^k (k \in N)$ よりも速く ∞ に増大することを示したい .

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ を二項定理を用いて導け .

(2) (1) より $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$ を導け .

4 次の各問に答えよ .

(1) 定義に従って、 $A = \{\arctan n : n \in N\}$ の上限 $\sup A$ 、下限 $\inf A$ を求めよ .
ただし、 $\arctan x$ は $\tan x (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数を表す .

(2) ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理とは何かを説明して、数列の上極限、下極限を定義するまでの過程を述べよ .

5 数列 $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, a_1 = 3$ を考える . 極限值 a があると仮定すると、漸化式の両辺を $n \rightarrow \infty$ として $a = 6 - \frac{5}{a}$. これを a について解くと $a = 1, 5$ を得る . 次の問に答えよ .

(1) $1 < a_n < 5, n \in N$ を数学的帰納法で示せ .

(2) a_n は 5 に収束することを示せ .

(3) $a_1 \neq 1$ のとき、 a_n は 1 に収束することがあるか ?