1. たて，よこ，たかさの辺の和が 1 である直方体のうち，体積が最大となるものが立方体であることを示したい．
   (1) 極値問題として定式化せよ．特に変数の定義域を明らかにし，図示せよ．
   (2) 題意を示せ．

2. 曲線 $f(x, y) = x^4 - y^2 + x^3y + 1 = 0$ の形状を知りたい．
   (1) $f(1, b) = 0$ をみたす b を求めよ．
   (2) (1) で求めた f の零点の近傍における $f(x, y) = 0$ の姿を考察せよ．

3. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{-x}$ の $(0, 0)$ におけるグラフの形状を調べたい．
   (1) $(0, 0)$ における 2 次近似多項式を求めよ．
   (2) 接平面を基準としてグラフの形状を説明せよ．

4. 関数 $f(x, y)$ について次の問に答えよ．
   (1) 非退化停留点とはどのような停留点か説明せよ．
   (2) 非退化停留点における極値の判定について述べよ．

[解答]

1. 極小点 $(\frac{13}{34}, \frac{-5}{34})$

2. (1) $S = r^2(\tan x + \tan y - \tan(x+y))$. x, y の範囲は $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ かつ $\frac{\pi}{2} < x + y < \pi$. 2つ目の条件は $0 < z = \pi - x - y < \frac{\pi}{2}$ より.

(2) 停留点を求めると，まず $x = y$ が条件として得られ，次に $\cos^2 x = \cos^2 2x$ を得る．$0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < 2x = x + y < \pi$ から $\cos x > 0$, $\cos 2x < 0$ である．よって，$\cos x = -\cos 2x$. 加法定理を用いて解くと $\cos x = \frac{1}{2}$. $x = y = \frac{\pi}{3}$, $z = \pi - x - y = \frac{\pi}{3}$. あとは $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ が S の極小点であることを示せばよい.

3. (1) 陰関数定理を用いる．$F(x, y) = 0$ をみたす点 (x_0, y_0) が $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ならば，(x_0, y_0) のある近傍が存在して，その近傍において $F(x, y) = 0$ の集合は (x_0, y_0) を通るグラフ $y = f(x)$ で与えられる.

(2) $F(x, y) = x^3 + 2xy - y^2 - 1$ とおくと $F(1, 2) = 0$ をみたし，$F_y(1, 2) \neq 0$ をみたす．陰関数定理より $(1, 2)$ の近傍で $y = f(x)$ かつ $2 = f(1)$ なる f が存在して，$x^3 + 2xy - y^2 = 1$ を与える．$f'(1) > 0$, $f''(1) < 0$ だから f は上に凸な単調増加関数である.

4. (1) $1 + x + y + x^2 + 3xy + y^2$

(2) 接平面 $1 + x + y$ を基準として $(0, 0)$ は鞍点様な点である．したがって，接平面の上と下にグラフが現れる.

5. (1) (x_0, y_0) が極値点であるとき，等高線 $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ と $\varphi(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) で接する．よって，勾配ベクトルが等高線に垂直に現れるという事実から，(x_0, y_0) において f と φ の勾配ベクトルは一次従属の関係になる．つまり，$\exists \lambda \in \mathbf{R}$ s.t.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla \varphi(x_0, y_0).$$

これと $\varphi(x_0, y_0) = 0$ が求める条件である.

(2) $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}})$ のとき極大値 $\sqrt{17}$. $(x, y) = (\frac{-1}{\sqrt{17}}, \frac{-8}{\sqrt{17}})$ のとき極小値 $-\sqrt{17}$.

K.U.