

1. 次の命題が正しいければ証明をせよ．また，誤りならば反例を挙げよ．解答は正しい場合は (正)，誤りの場合は (誤) で始めること．

命題：ライプニッツの交代級数は常に条件収束である．

2. 次の級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  の収束を判定せよ．

(1)  $a_k = \frac{1}{k^4}$     (2)  $a_k = \frac{k^k}{k!}$

3. 次の 2 つのうち 1 つ を選択して答えよ．

(a) 正項級数  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  が  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = r < 1$  をみたすならば収束することを示せ．

(b)  $\mathbb{R}^2$  の点列がコーシー列ならば収束することを示せ．

4. 次の集合は  $\mathbb{R}^2$  の開集合，閉集合，どちらでもない，のどれであるか (理由を述べて) 判定せよ．

(1) 閉区間  $I = [0, \pi]$  に対して  $A = \{(x, \sin x) : x \in I\}$ .

(2)  $z = \log(x + y)$  の定義域  $B$

5.  $s > 0$  を実数とする． $f(x, y) = \frac{x^s y}{x^2 + y^2}$  について極限值  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  が存在するための  $s$  の必要十分条件を求めよ．

6. ガンマ関数  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$  ( $s > 0$ ) を考える．自然数  $n$  について  $\Gamma(n)$  を求めよ．