

i は虚数単位を表す． \mathbf{C} は複素数全体を表す．複素数 z に対して $\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z$ はそれぞれ z の実部, 虚部を表す． $\bar{z}, |z|$ はそれぞれ z の複素共役, 絶対値 (大きさ) を表す．

1. 四則演算の定義に従って次を示せ．

$$(1) \operatorname{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (2) z\bar{z} = |z|^2$$

2. 次の演算による複素数を複素数平面に示せ．ただし, z は $|z| < 1$ をみたすように取る．

$$\frac{2iz + 1 - i}{z}$$

3. $z^3 = \sqrt{3} - i$ の解を極形式で表し, 複素数平面上に図示せよ．

4. 一次変換 $w = f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$) は次をみたす．

$$f(-1) = 0$$

$$f(0) = i$$

$$f(-i) = 1$$

$f(z)$ を求めよ．

5. 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ が正則であるとき, u, v がコーシー・リーマンの方程式をみたすことを導け．

6. 関数 $f(z) = (\bar{z})^2$ について考える．

(1) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ と表すとき, u, v を表示せよ．

(2) $f(z)$ は正則であるか? 判定せよ．