$\boldsymbol{N}$ は自然数全体を表す.

1. $A = \{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in \boldsymbol{N}\}$ の上限を求めて，求めた値が正しいことを上限の定義に従って説明せよ.

2. 実数の連続性から導かれる命題として,「上（下）に有界な単調増加（減少）数列は収束する」がある．$a_1 > 3$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $n \in \boldsymbol{N}$ をみたす数列 a_n は収束することを示し，極限値を求めよ.

3. 小問の結果を用いながら順に答えよ.

   (1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \sqrt{x} \log x$ が存在すれば求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ $(k \in \boldsymbol{N})$ は用いてよい.

   (2) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ $(0 < x < 1)$ について，増減，$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f(x)$ を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

   (3) 次の実数全体で定義された関数 $g(x)$ の右連続，左連続，連続な点を求めよ.

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^{\sqrt{x}}, & 0 < x < 1, \\ -x + 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

4. 次の各問に答えよ.

   (1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{1+2n} = \frac{1}{2}$ を $\epsilon - N$ 法で検証せよ.

   (2) 数列がコーシー列であるとはどういうことか？

   (3) コーシー列は有界であることを示せ.

   (4) (3) の結果から上極限，下極限の言葉を用いて，コーシー列は収束することを説明せよ．ただし，次の語句を含めること．ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理，部分列