i は虚数単位を表す．$\mathbb{R}$ は実数全体を表す．複素数 z に対して $\overline{z}$ はその複素共役を表す．

1. 三角関数 $w = \sin z,\ z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ について，

   (1) 定義をかいて．x に関して周期関数であることを示せ．

   (2) 正則であることを示し，$(\sin z)' = \cos z$ を導け．

2. $f(z) = i\overline{z},\ z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ について次の問に答えよ．

   (1) 曲線 $C_1 : z(t) = -t + it^2,\ t : 0 \to 1$ を描いて．C_1 上の f の複素積分を計算せよ．

   (2) 曲線 $C_2 : z(t) = t,\ t : 0 \to -1;\ C_3 : z(t) = -1 + it,\ t : 0 \to 1$ に対して $C_4 = C_2 + C_3$ で定義する．C_4 を描いて，C_4 上の f の複素積分を計算せよ．

   (3) (1), (2) の結果から導かれる $f(z)$ の性質を答えよ．

3. 次の各問に答えよ．

   (1) $r > 0,\ z_0$ は複素数である．閉曲線 $C : z(t) = z_0 + re^{it},\ t : 0 \to 2\pi$ に対して $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dx$ を計算せよ．ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$.

   (2) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + 4)(z - 4)}$ の特異点をすべて求めて，その留数を計算せよ．

   (3) 閉曲線 $C : z(t) = 3e^{it},\ t : 0 \to 2\pi$ を取る．(2) の f について $\int_C f(z)dz$ を計算せよ．

4. 次の各問に答えよ．

   (1) 実数値関数 $u(x, y)$ についてグリーンの定理をかけ．

   (2) (1) の定理を用いてコーシーの定理を証明せよ．ただし，グリーンの定理は証明せずに用いてよい．

以上